機械学習を用いた乱流計算の低次元化方法

大阪大学大学院基礎工学研究科
清水雅樹　河原源太

乱流の数値計算において大幅なコスト削減が切に求められる．散逸系の最終的な軌道 (アトラクタ) は，系の次元より低次元の部分空間に留まることが期待される [1]．アトラクタが各点において，実質的な有限の厚みを少数方向にのみ有する場合，その少数程度の自由度のみを用いた系の構築が原理的に可能である．ここでは，平面クエット流における初期乱流の軌道が低次元部分空間に留まっているという性質から，この部分空間上での近似支配方程式を機械学習を用いて構築する手法を紹介する．

図１に永田の定常解（$Re = 163.5$ 付近で出現する解）から周期倍分岐で乱流が発生する分岐を示す．この分岐図は Kreilos and Eckhardt(2012) の結果を再現したものである．直接数値計算（以下，DNS）はガラーキン・スペクトル法により行い，速度場が任意の座標で８桁程度有効となる解像度を用いている．1000 通りぐらいの Re で DNS を行い，アトラクタに十分漸近するために長時間後の物理量をプロットして図１が得られる．tatara において数万ノード時間を要する．

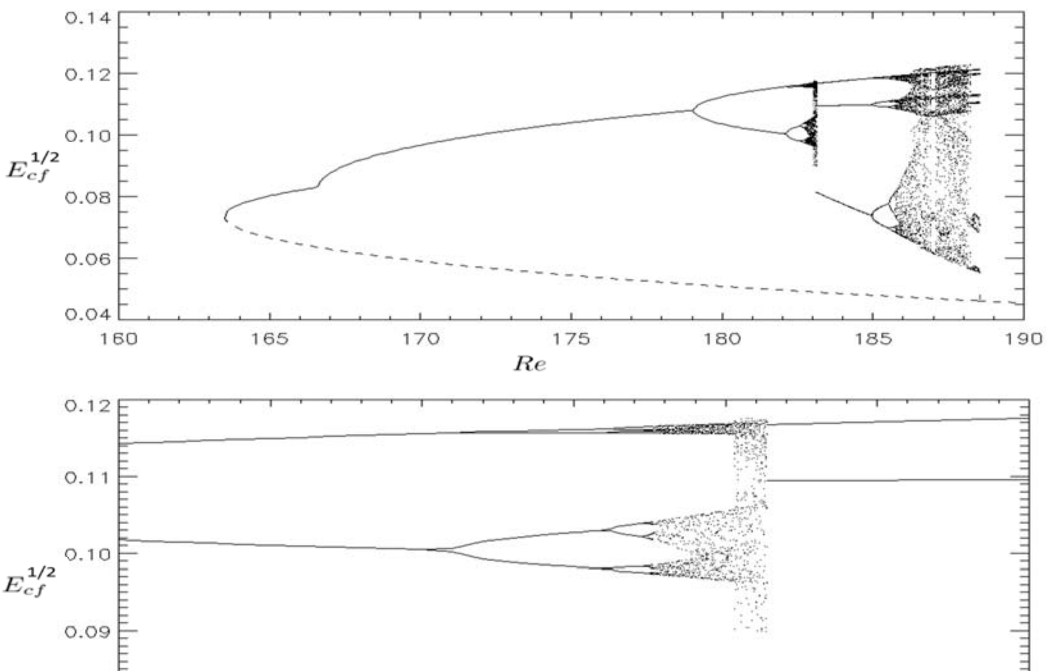

図１：平面クエット流における初期乱流に至る分岐図．縦軸は主流に垂直な断面内の速度成分による運動エネルギー (E_{cf}) の時間的極大値である．下図は周期倍分岐の拡大図.

図２ (左) に $Re = 183.1$ での乱流アトラクタの２次元空間への射影を示す．このアトラクタ上で，ある時間間隔後（ここでは $t = 1$ 後）の物理量を精度良く予測するために，適当な数の物理量を用いて回帰分析を行い，低次元系を構築する．回帰分析は機械学習のパッケージ「Kernlab」[3] を用いた．図２ (右) は５つの物理量のみを用いて構築された５次元系の軌跡と，DNS の軌跡との比較の図であり，５次元系は DNS を長時間追従できることが分かる．この例では，５つ以上の物理量を用いることで高精度な低次元系を構築できる（物理量の数を増やしても精度の程度は変わらない）．さらに Re が大きい場合の例を図３に示す．ここでの構築された

系は，空間に３２点を配置し，これらの３２点での流れ方向速度の値から $t = 1$ 後のそれらの値を学習することによって得られた系である．ダイナミックスはよく表されていることが分かる．

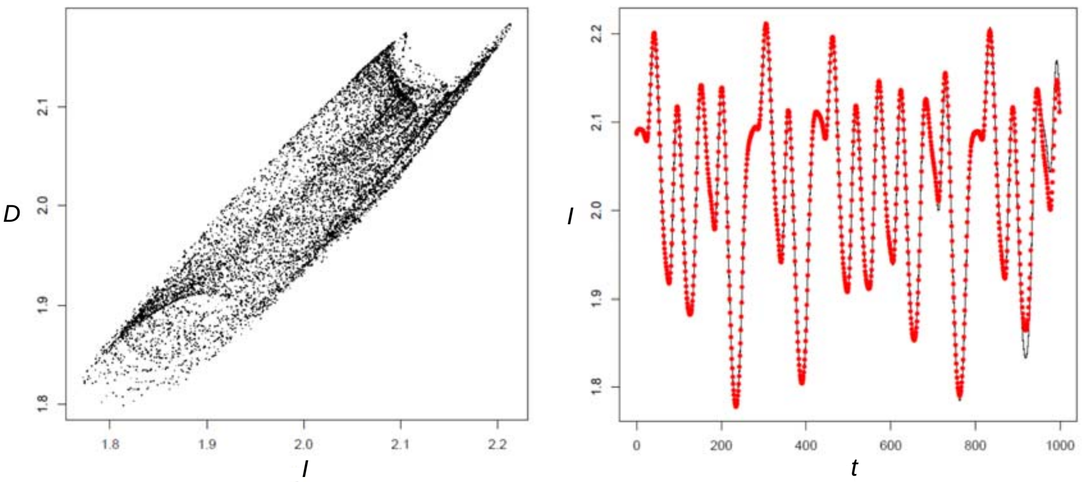

図２：(左)$Re = 183.1$ での乱流アトラクタ．(右)DNS(黒線) と５次元系 (赤○) の軌跡の比較．$Re = 183.1$

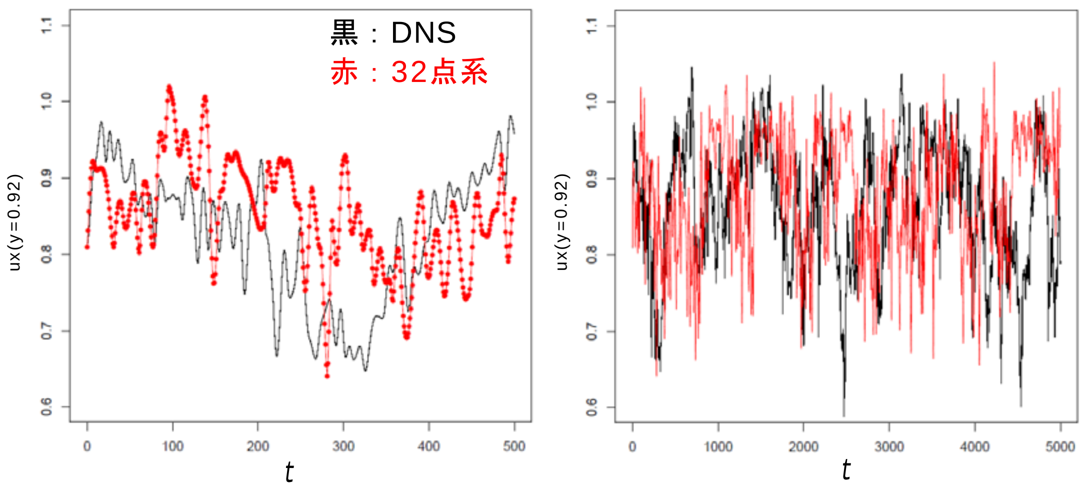

図３：$Re = 550$ での DNS(黒) と流れ方向 32 点系 (赤) の軌跡の比較．縦軸は壁面近傍の流れ方向速度．左は短時間での比較で右は長時間での比較．

以上より，初期乱流（Re が小さい乱流）では少数の自由度を用いることで，乱流の軌道を良く再現する系を構築することが可能であることが分かる．このため，DNS に比較して圧倒的に CPU 時間を削減した乱流の計算が可能である．ここでの成功は機械学習のアルゴリズムによる精度の高さの恩恵が大きい．工学的に必要な大きさの Re では，さらに大きな自由度が系の構築に必要であることは想像できるが，上記の例のように，DNS で用いる自由度に比較して圧倒的に小さい数であると考える．しかし現状では Re の大きい乱流に，本手法を直接適応するのは現実的ではない．もうひと工夫することによって，必要最小限程度の自由度による乱流の数値計算が実現されることを今後の目標としたい．

[1]R. Temam, "Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics",
Applied Mathematical Sciences Volume 68, 1988.
[2]T. Kreilos and B. Eckhardt, "Periodic orbits near onset of chaos in plane Couette flow",
Chaos, 22, 047505, 2012
[3]A. Karatzoglou, A. Smola, K. Hornik and A. Zeileis " kernlab - An S4 Package for Kernel Methods in R ", Journal of Statistical Software,11, 2004