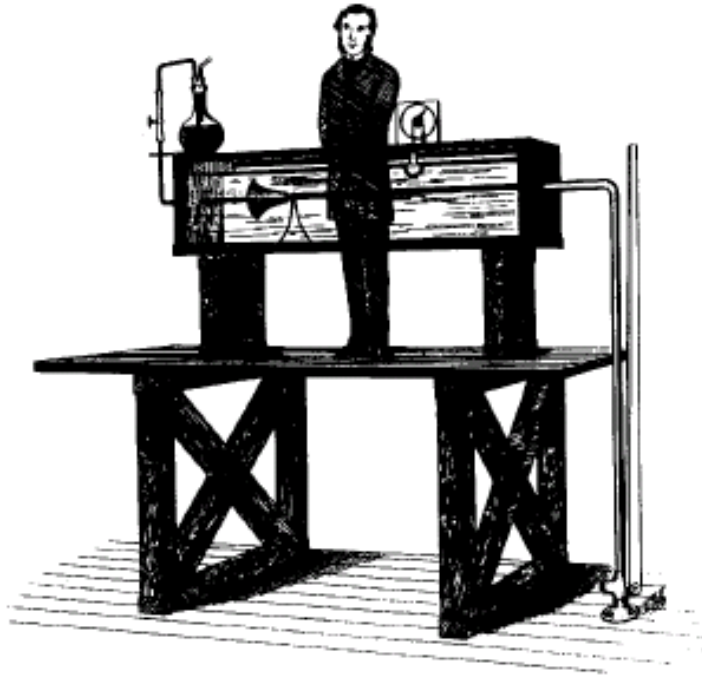


# ミニマル平面クエット流の 大域分岐構造と境界クライシス

大阪大学基礎工学研究科

清水雅樹

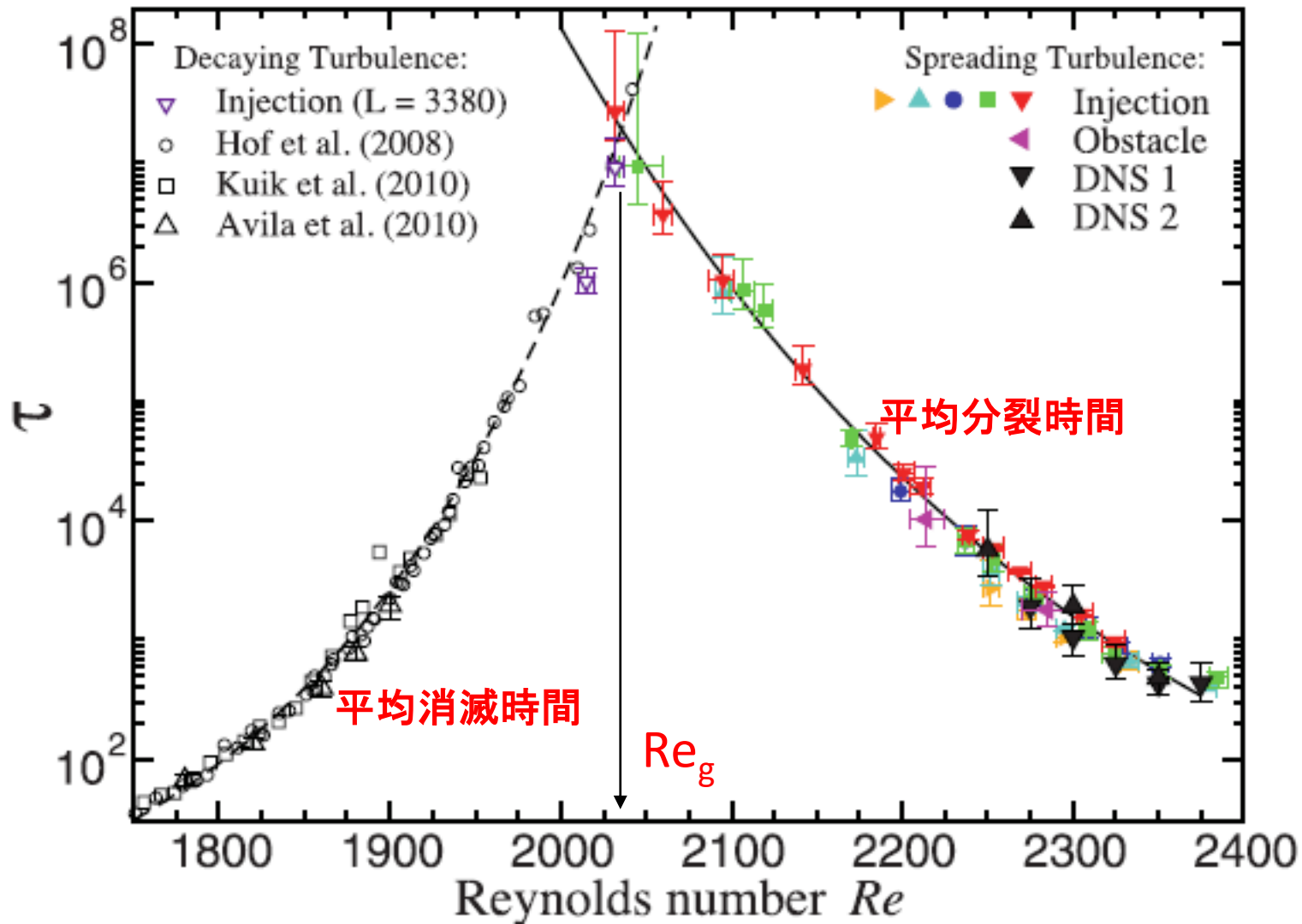
# Reynolds の実験(1883)



1. 臨界レイノルズ数を境に, 層流から乱流に遷移する
2. その臨界レイノルズ数( $Re_c$ )は, 攪乱の大きさによって変化する ( $Re_c \sim 2000$ と $12000$ )
3. 臨界レイノルズ数( $\sim 2000$ )付近での流れは, 間欠的である

# 大域臨界レイノルズ数- $Re_g$

## 円管流 Avila, K. et al., Science (2011)



# システムとパラメータ

- ミニマル平面クエット流れを考える  
(詳細はKawahara, Phys. Fluids, 2005 等)
- 非圧縮ナビエ・ストークス方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} = \{ \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \}_y + \frac{1}{Re} \Delta \omega_y$$

$$\frac{\partial \Delta u_y}{\partial t} = - \{ \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \}_y + \frac{1}{Re} \Delta \Delta u_y$$

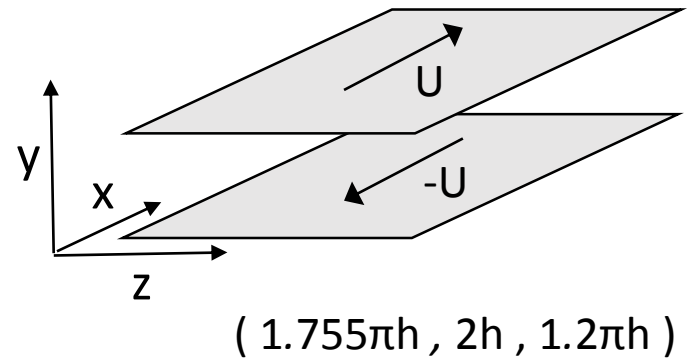
$$\frac{\partial \langle u_x \rangle_{xz}}{\partial t} = \langle (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_x \rangle_{xz} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \langle u_x \rangle_{xz}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \langle u_z \rangle_{xz}}{\partial t} = \langle (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_z \rangle_{xz} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle_{xz}}{\partial y^2}$$

- 境界条件は(x, z)方向には周期的, 壁面では粘着境界条件

$$\omega_y = u_y = \partial u_y / \partial y = \langle u_x \rangle_{xz} = \langle u_z \rangle_{xz} = 0$$

- 周期境界条件以外の対称性はなし
- 主にシステムの最終状態や吸引境界に注目する



# 離散化について

- 空間離散化はスペクトラルガラキン法  
(チェビシェフ多項式  $T_n$  + フーリエ級数)

$$\omega_y = \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=-K}^K \hat{\omega}^{nj k} (T_n - T_{n+2}) e^{i\frac{2\pi}{L_x} jx} e^{i\frac{2\pi}{L_z} kz}$$

$$u_y = \sum_{n=0}^{N-4} \sum_{j=-J}^J \sum_{k=-K}^K \hat{u}^{nj k} \left( T_n - \frac{2(n+1)}{n+3} T_{n+2} + \frac{n+1}{n+3} T_{n+4} \right) e^{i\frac{2\pi}{L_x} jx} e^{i\frac{2\pi}{L_z} kz}$$

$$(\phi_x, \phi_z) = \sum_{n=0}^{N-4} (\hat{\phi}_x^n, \hat{\phi}_z^n) \left( T_n - \frac{2(n+1)}{n+3} T_{n+2} + \frac{n+1}{n+3} T_{n+4} \right)$$

$$(\langle u_x \rangle_{xz}, \langle u_z \rangle_{xz}) = \left( \frac{d\phi_x}{dy}, \frac{d\phi_z}{dy} \right)$$

- (N,J,K)=(31,15,15). 全自由度=2(N-2)(2J+1)(2K+1)=55731
- スペクトル係数の時間積分はクランク-ニコルソン法 + 2nd-アダムズ-バッシュフォース法. dt=0.01

# 全体像 — $236 \leq Re \leq 247$

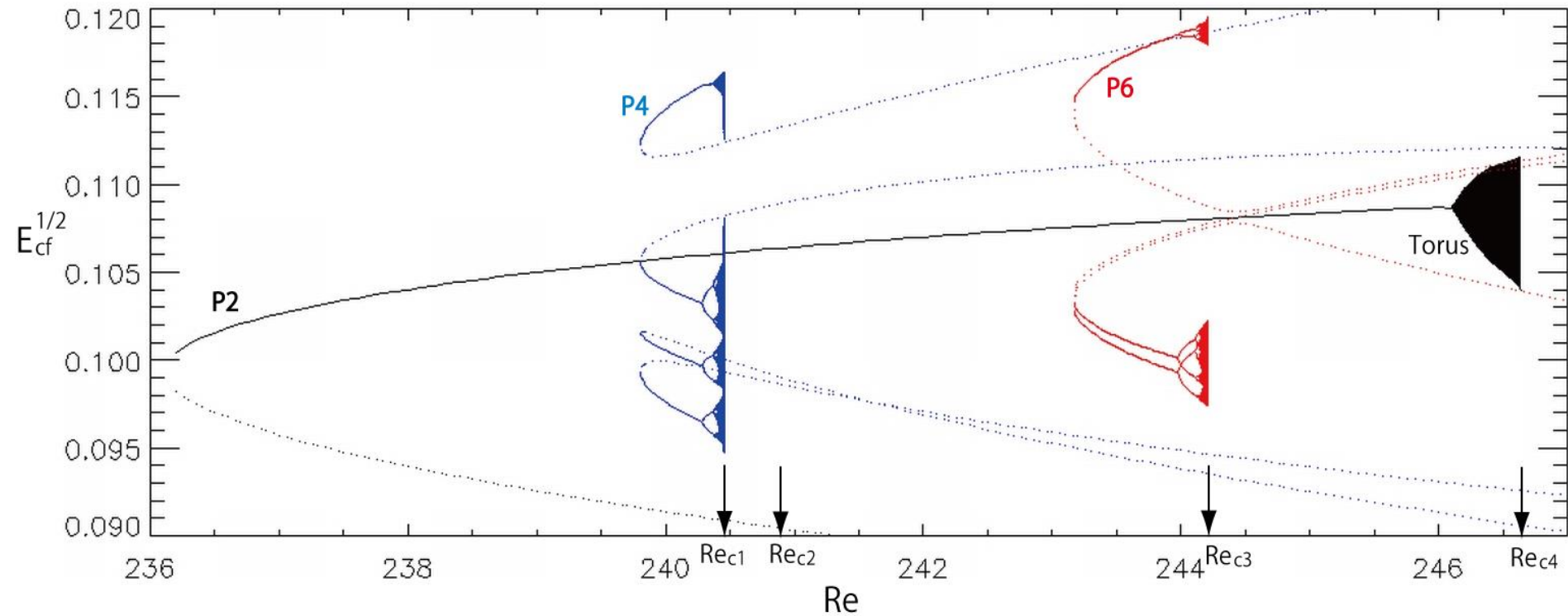
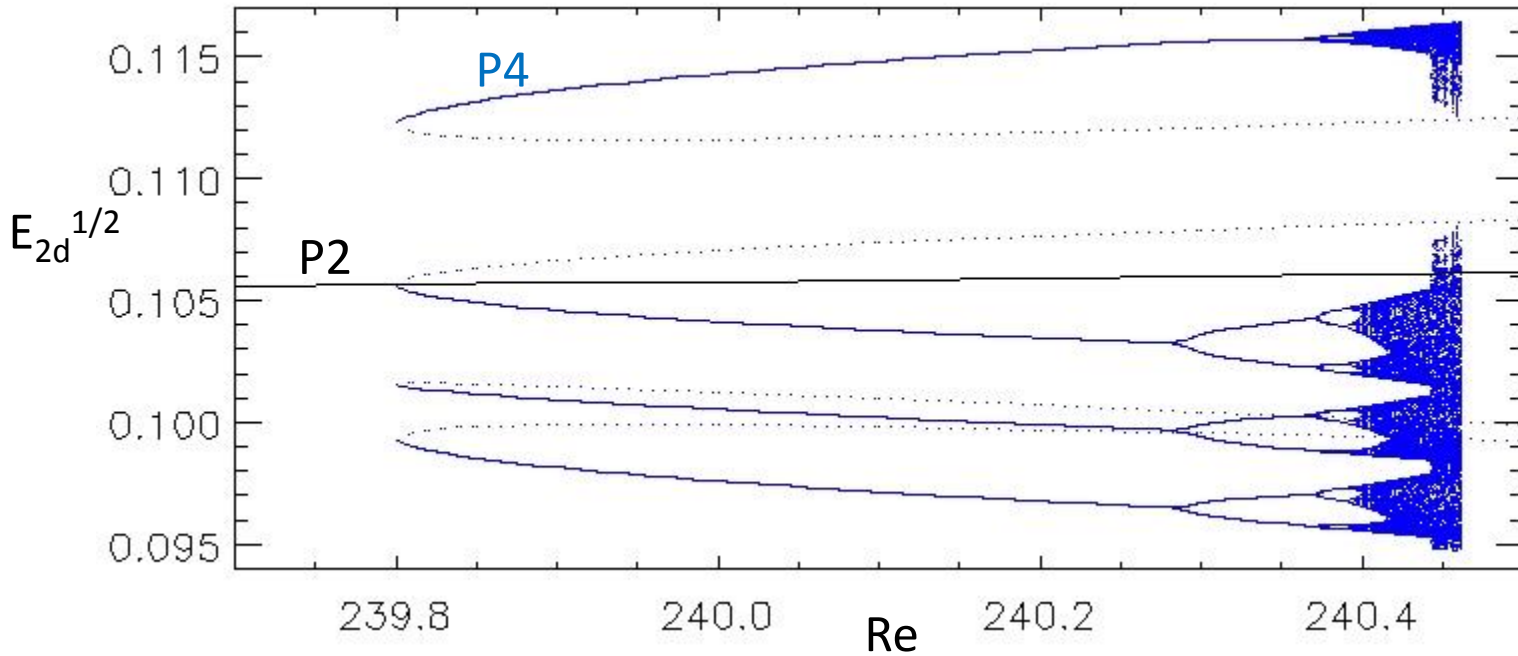
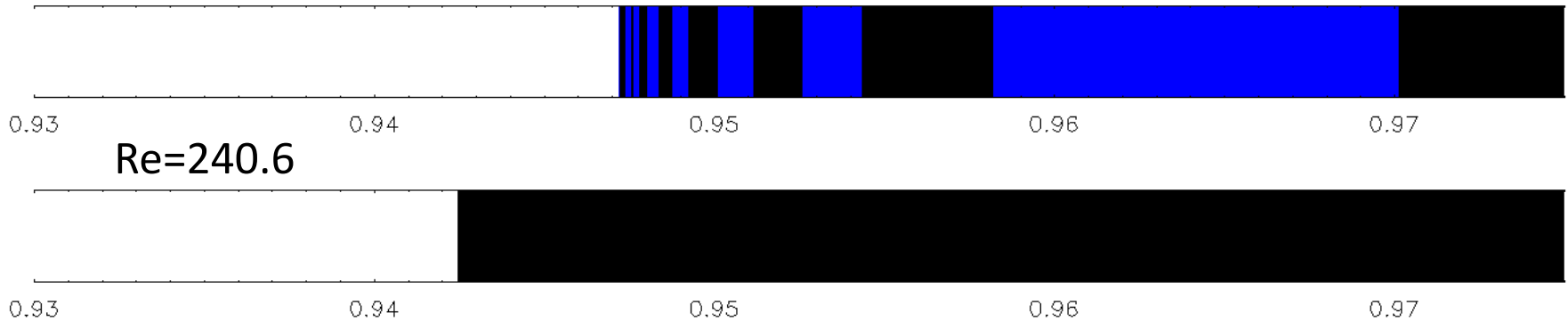


Figure 1: Bifurcation diagram of minimal plane Couette flow for  $236 \leq Re \leq 247$ . Lines and filled areas represent attractors and dotted lines are saddles.  $E_{cf}$  is local-maximum of the cross-flow energy, which is the same quantity used in Kreilos and Eckhardt[1]. At  $Re = 236.1, 239.8$  and  $243.2$  periodic orbits are created by saddle-node bifurcation. During one cycle these have two, four and six local maxima of  $E_{cf}$  respectively and have stable upper branch (P2, P4 and P6). Major global bifurcation points are represented by arrows at  $Re_c = 240.4, 240.9, 244.2$  and  $246.6$ .

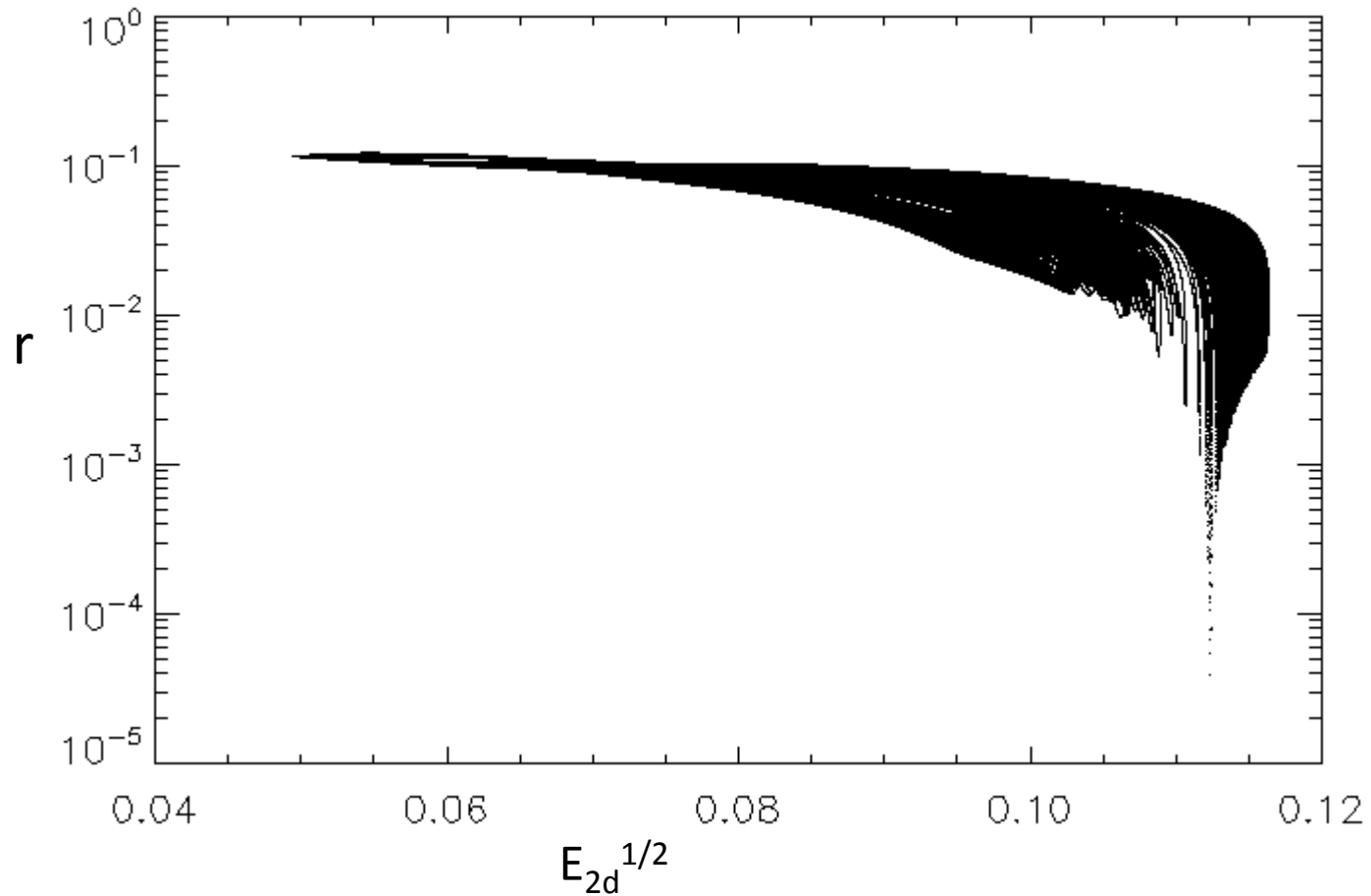
# クライシス①ー $Re_{c1}=240.46$



直線上の吸引領域  $Re=240.0$  白:層流, 青:P4, 黒:P2

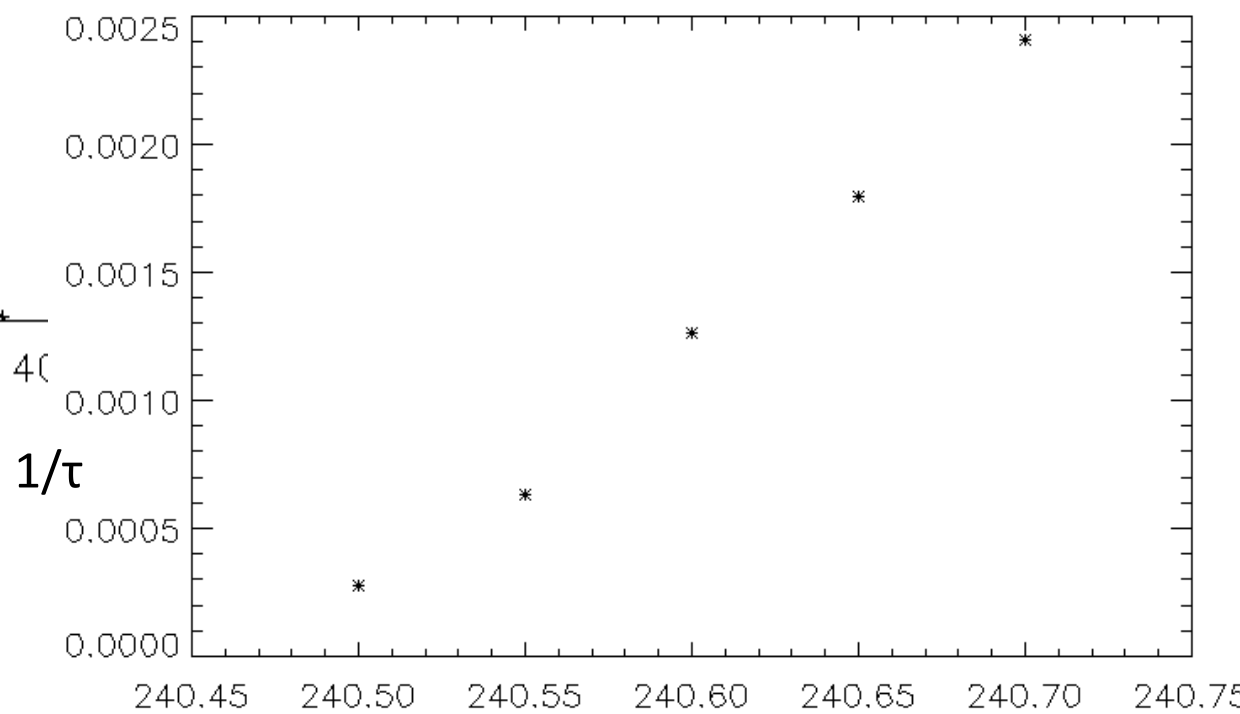
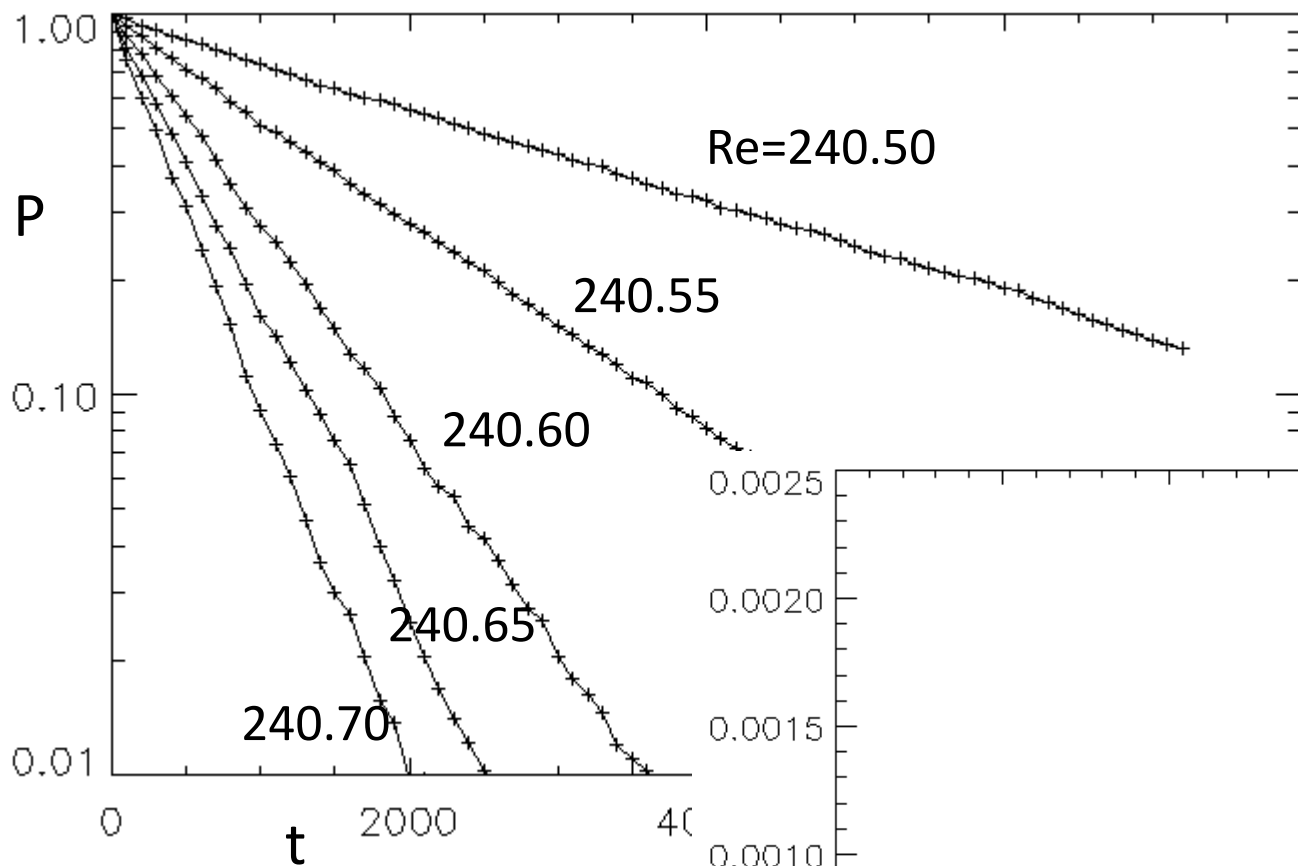


# クライシス① — $\text{Re}_{c1} = 240.46$

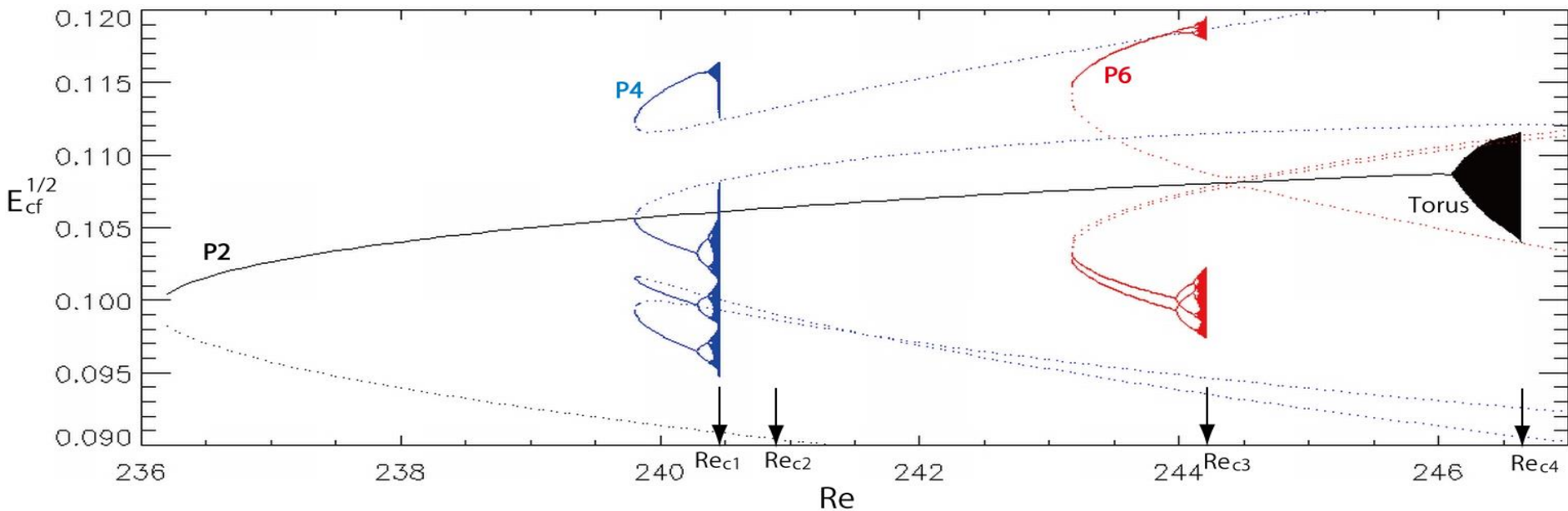


$r$ : サドル(P4)との距離  
任意に近づくはず

# クライシス① — $Re_{c1} = 240.46$



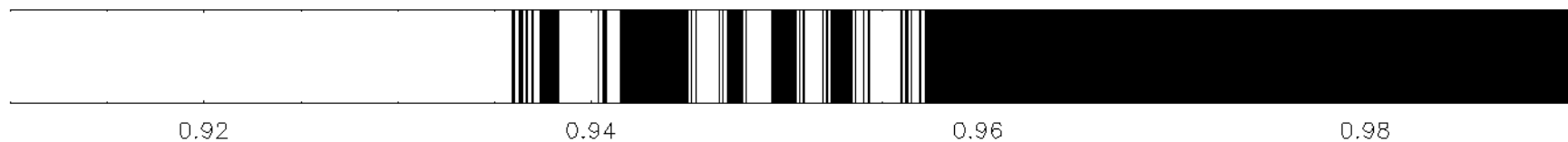
# クライシス② - $\text{Re}_{c2} = 240.9$



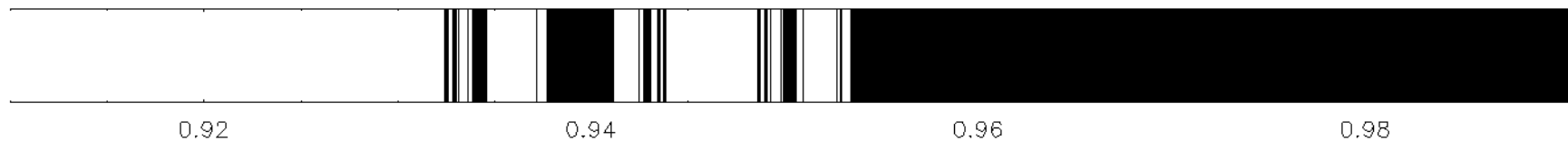
$\text{Re} = 241.0$



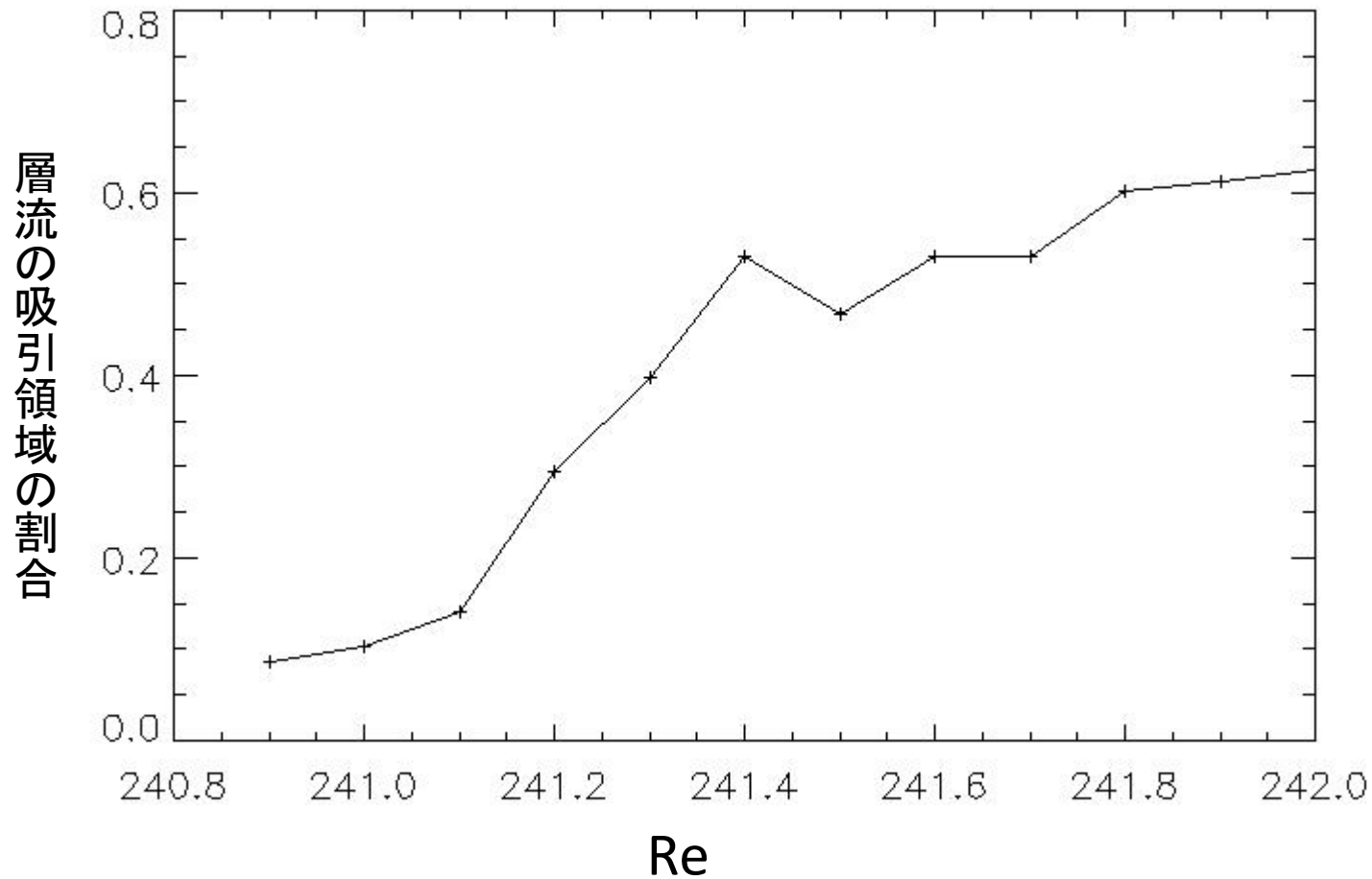
$\text{Re} = 241.5$



$\text{Re} = 242.0$

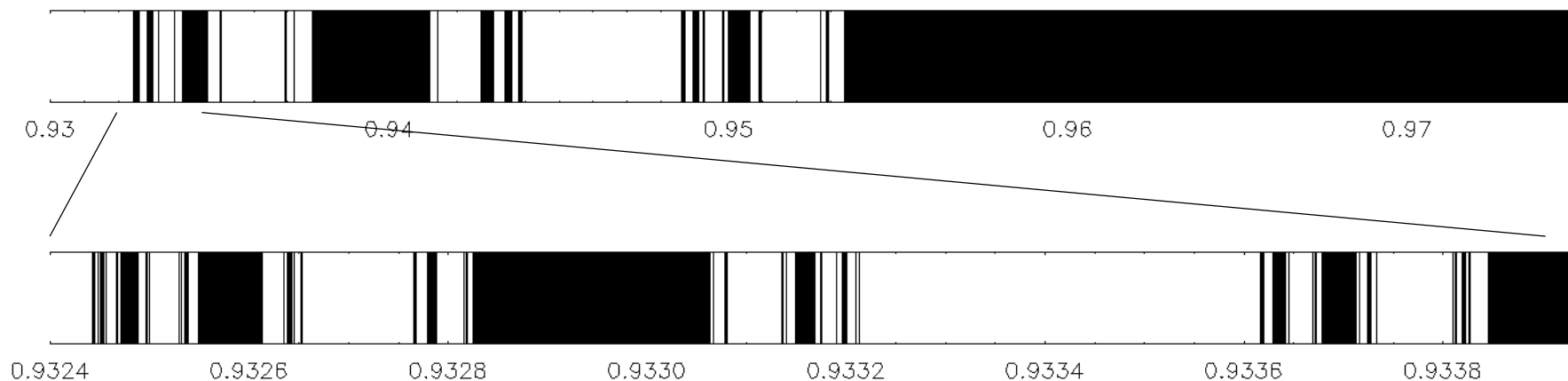


# クライシス②ー $Re_{c2}=240.9$



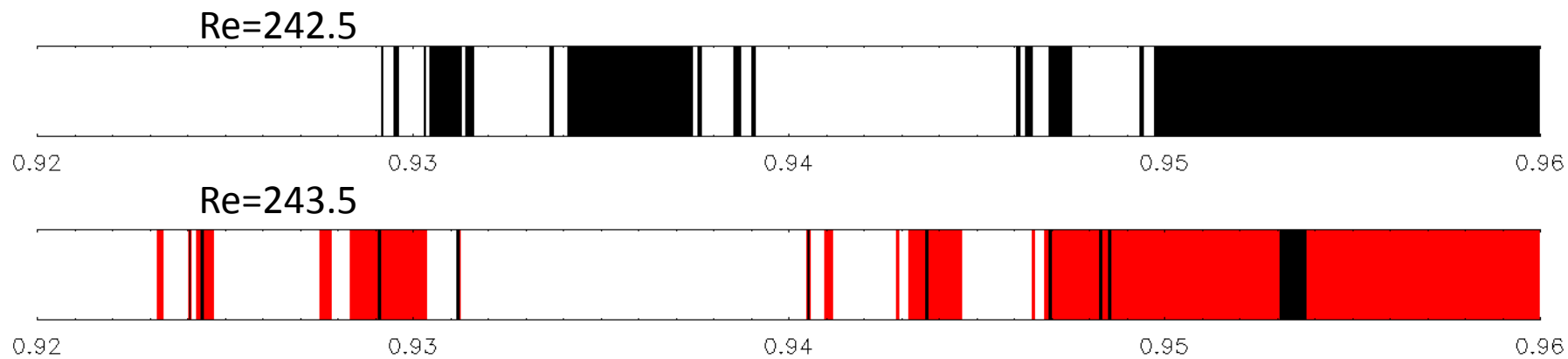
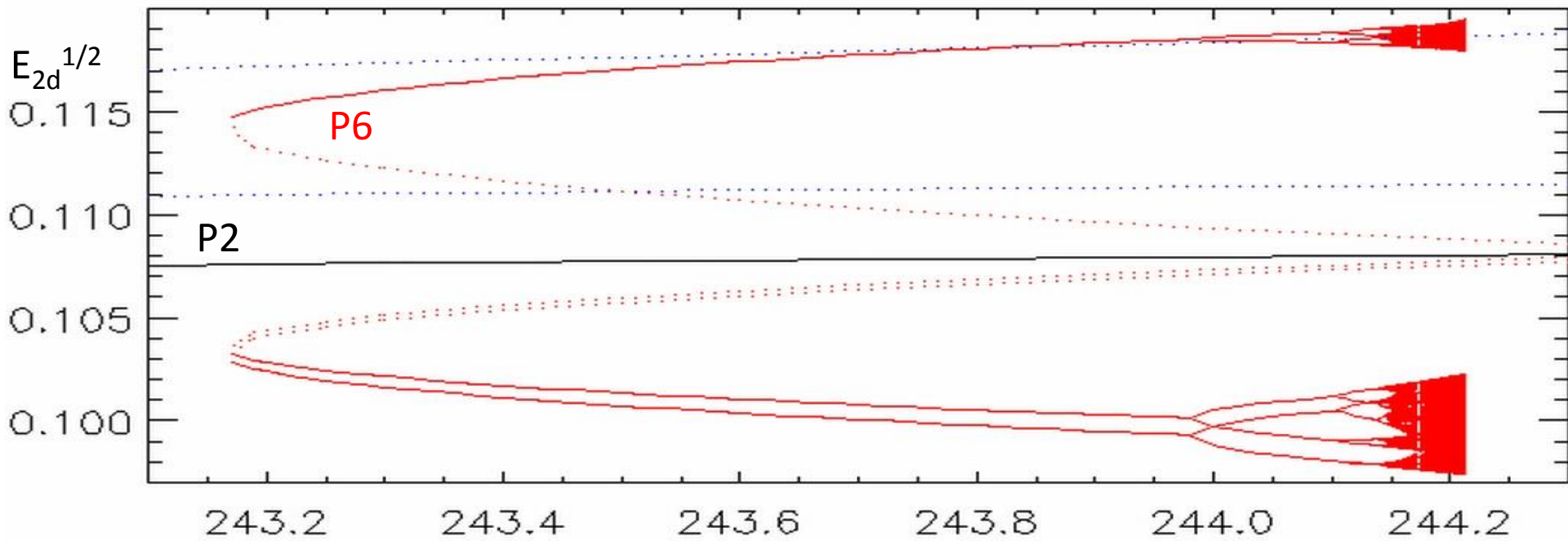
# フラクタル吸引領域境界一層流とP2

Re=242.0

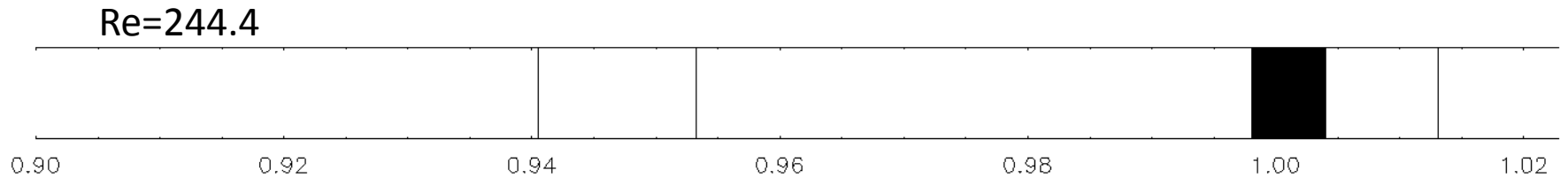
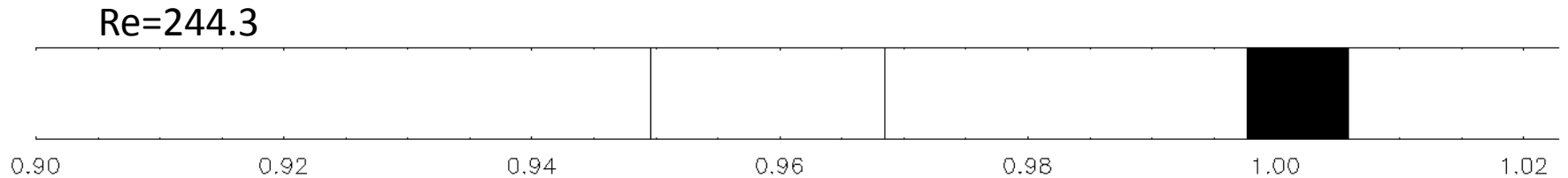
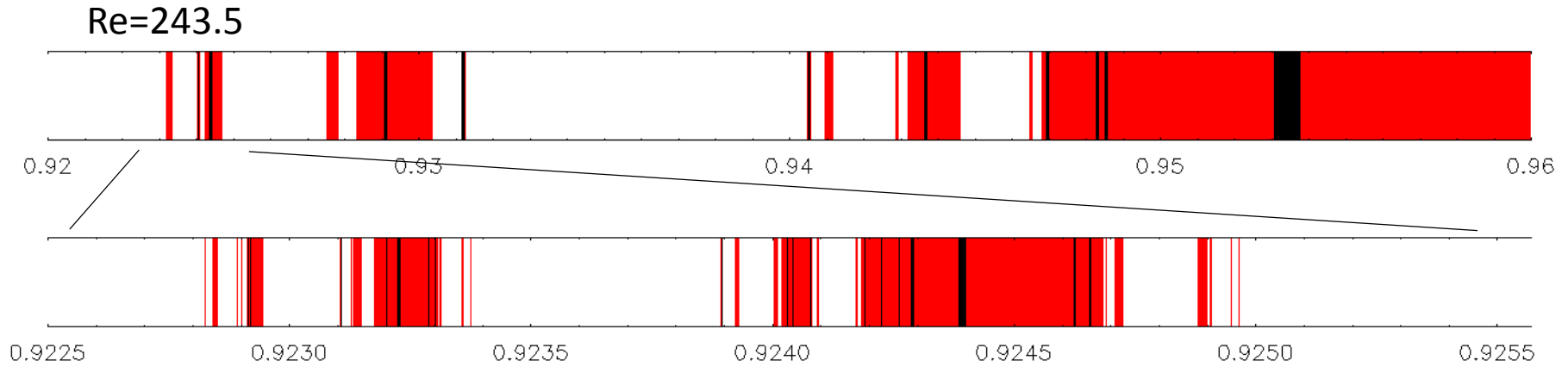


- カオスサドルが境界を形成する
- Wild hyperbolic sets

# クライシス③ — $\text{Re}_{c_3} = 244.21$

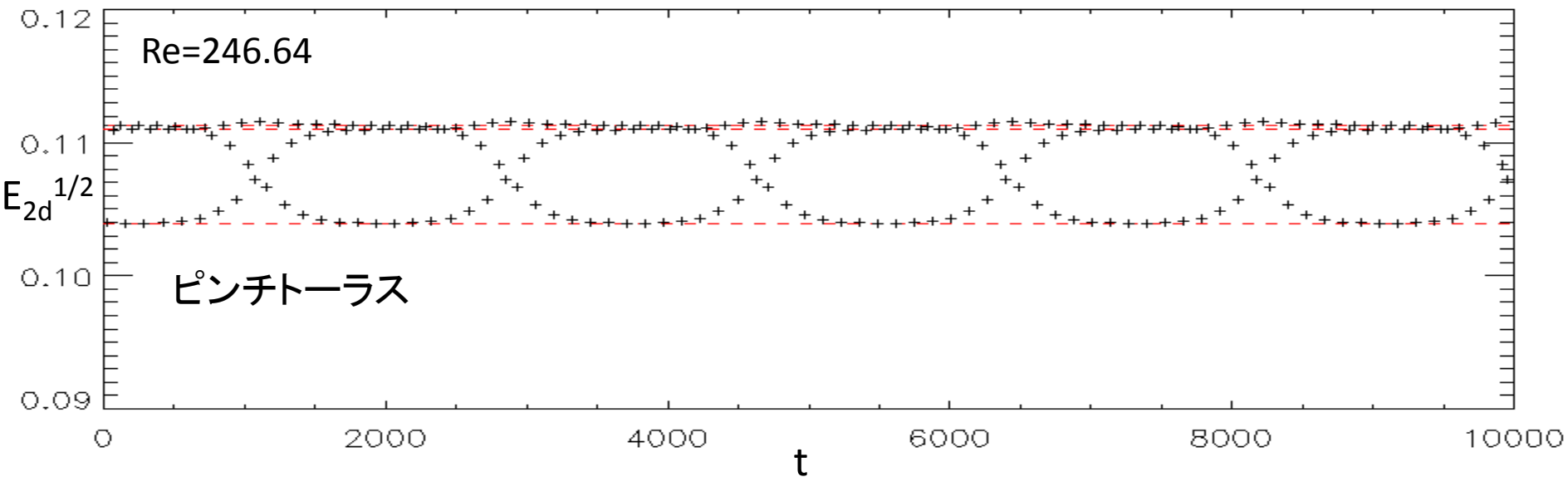
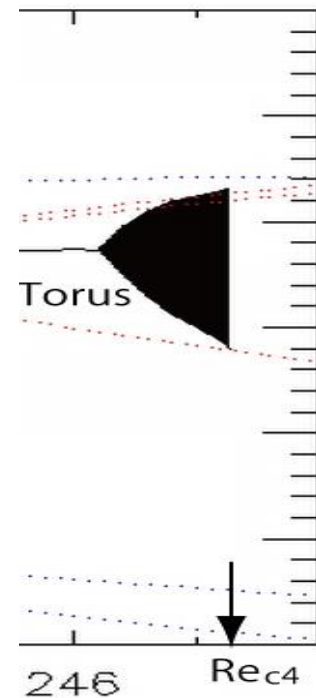
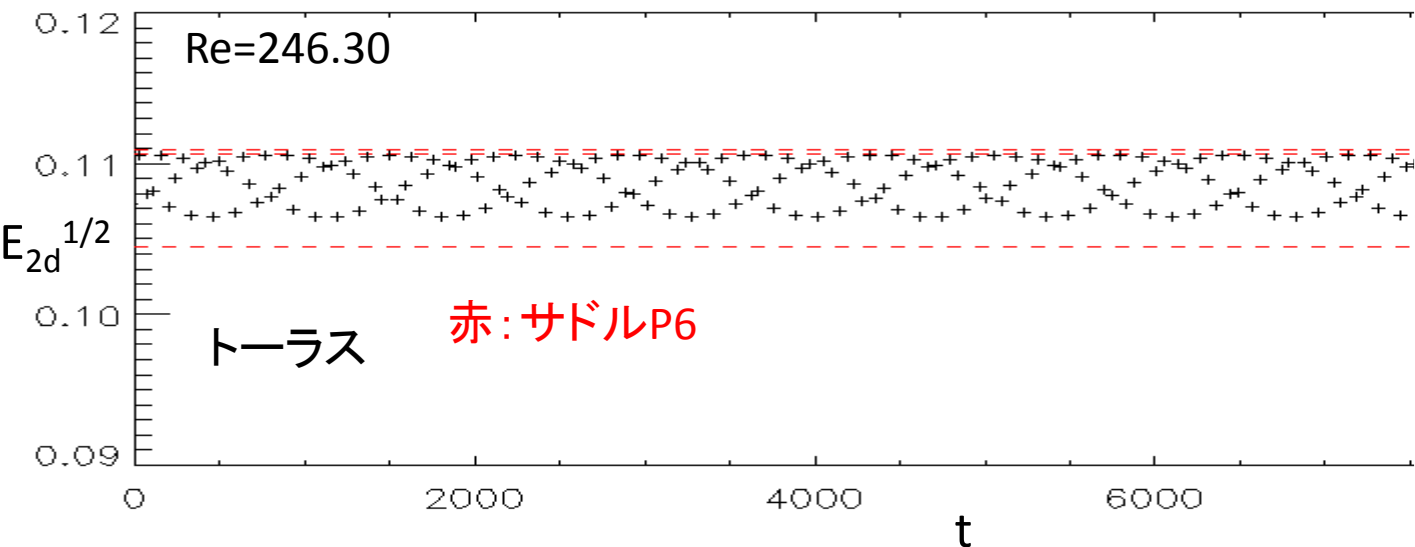


# クライシス③ — $Re_{c3} = 244.21$

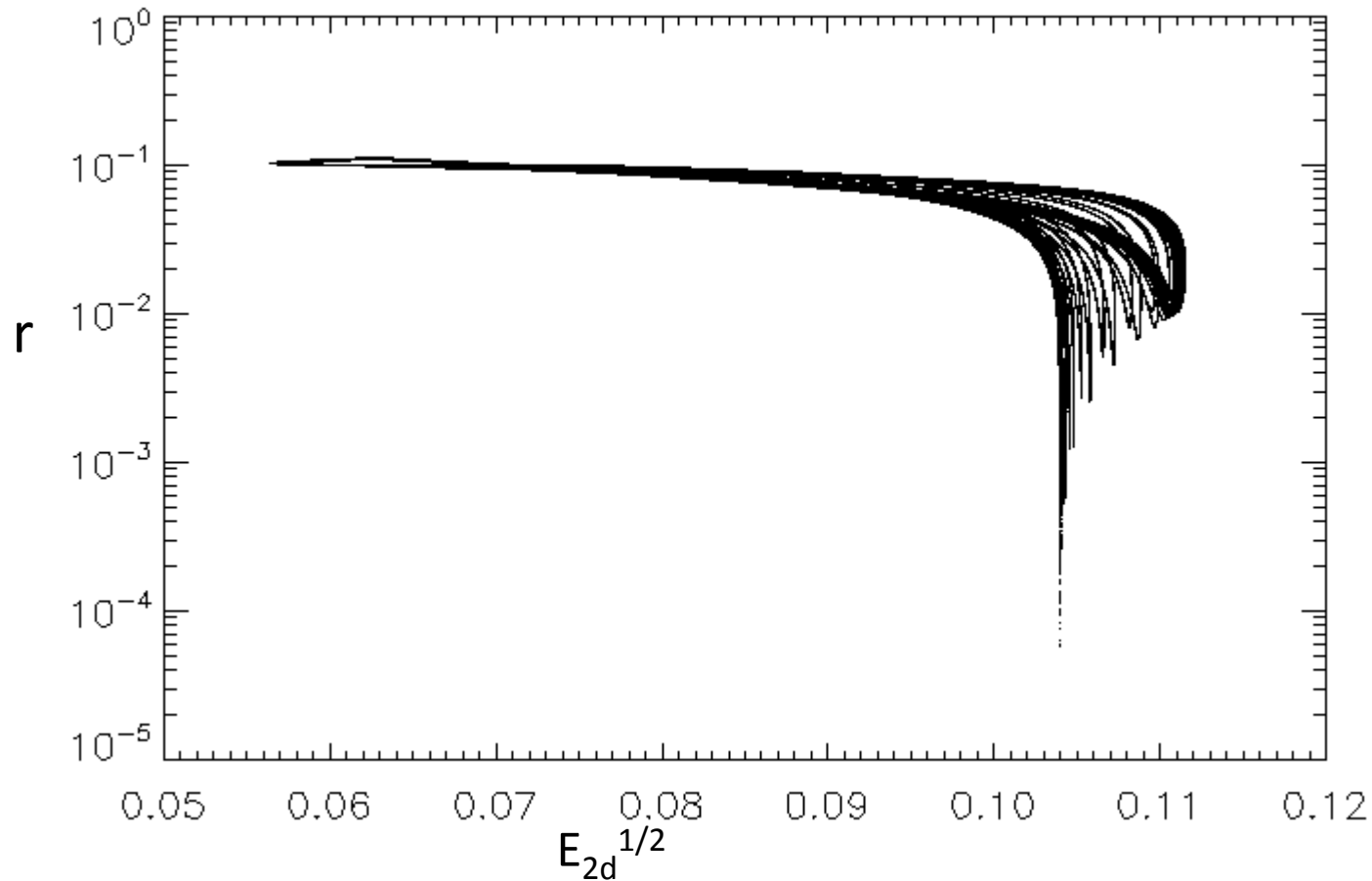


- P2の吸引域はP6の吸引域に閉じこめられている
- クライシス③ではカオスサドルに衝突する
- P6近傍は層流化

# クライシス④ — $\text{Re}_{c4} = 246.64$



# クライシス④ — $Re_{c4} = 246.64$



- $r$ : サドル(P6)との距離
- トーラス崩壊(クライシス④)後は全て層流化

# まとめ

- 壁面流においても、乱流遷移の初期過程と思われるものが数値計算的には分かってきた。

(Kreilos&Eckhardt(2012), Avila et al.(2013))

- ミニマルクエット流の場合、対称性を課さなくてもいくつかのアトラクタがあり、多様な過程が見られる

周期倍分岐カスケード, トーラス崩壊, フラクタル境界

- こうした乱流遷移の構造は、他の壁面流でも普遍的であろうか？アトラクタは必須なのか？

- 初期過程でのカオスと高レイノルズ数(あるいは遷移レイノルズ数)のカオスは関連があるのか？

