

# Fokker-Planck 型衝突項により 特徴づけられる 2 次元点渦系

静岡大学教育学部

八柳祐一

研究協力者

核融合研 羽鳥尹承

Laboratoire de Physique Théorique (IRSAMC), CNRS and UPS, Université de Toulouse

P. H. Chavanis

金沢大理 曾我之泰

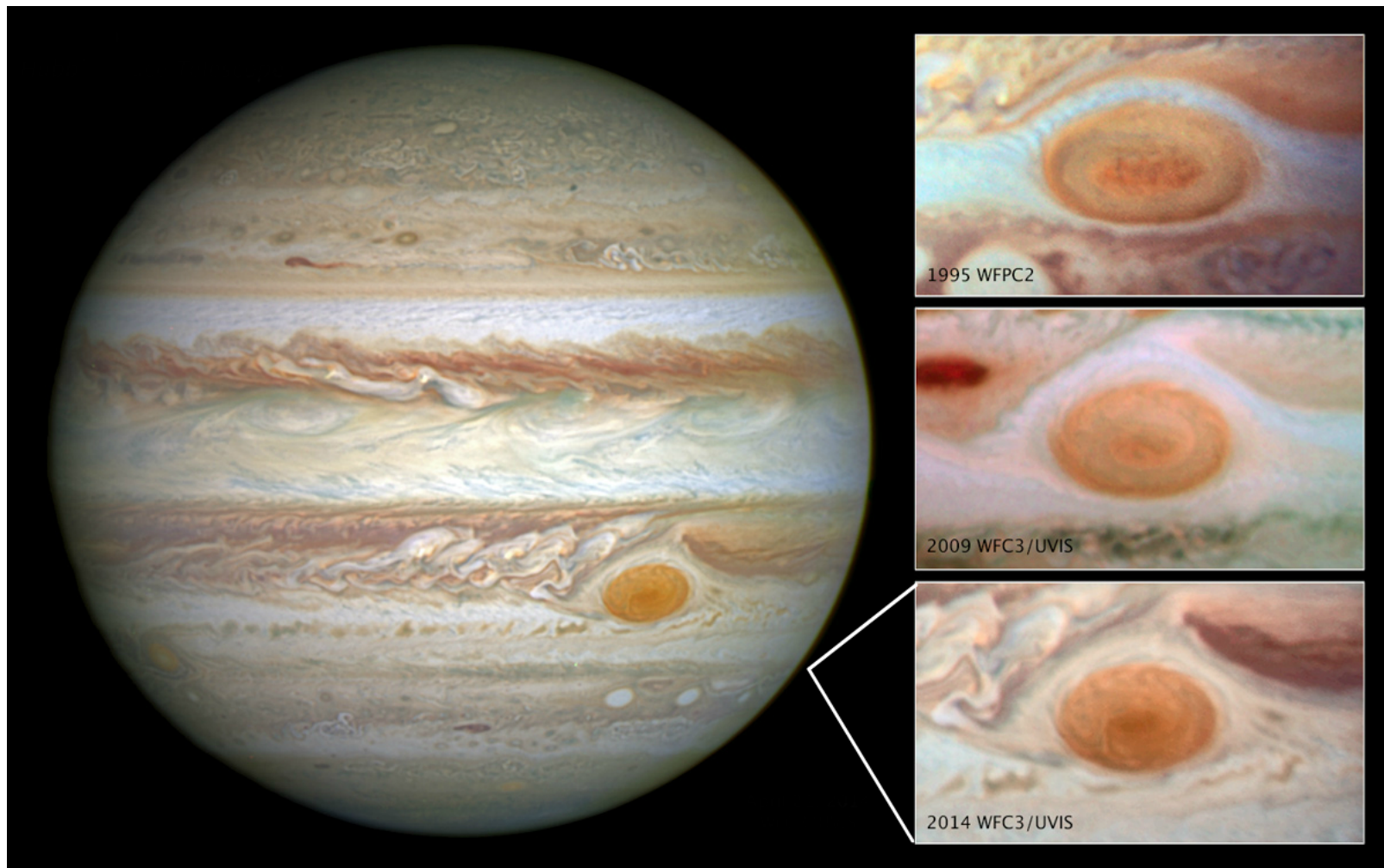
インテル(株) 堀越将司

# 1. 背景

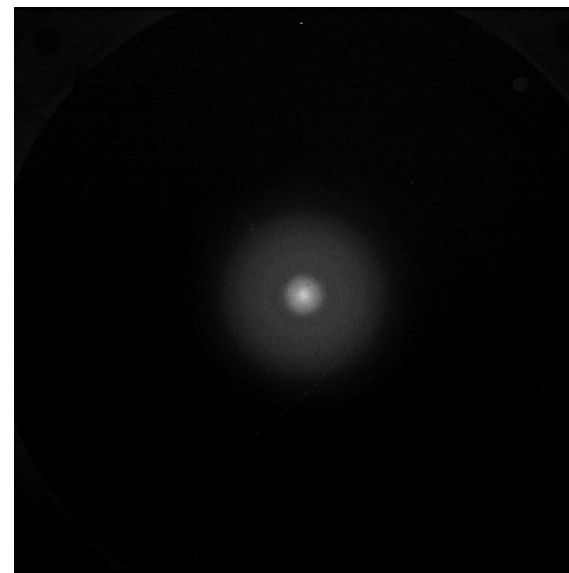
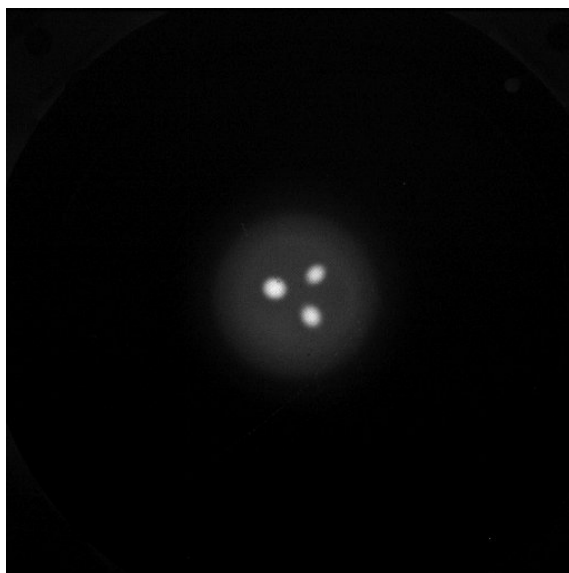
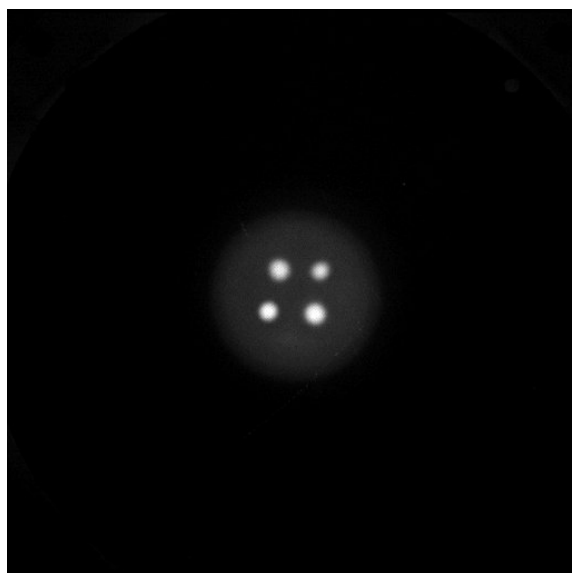
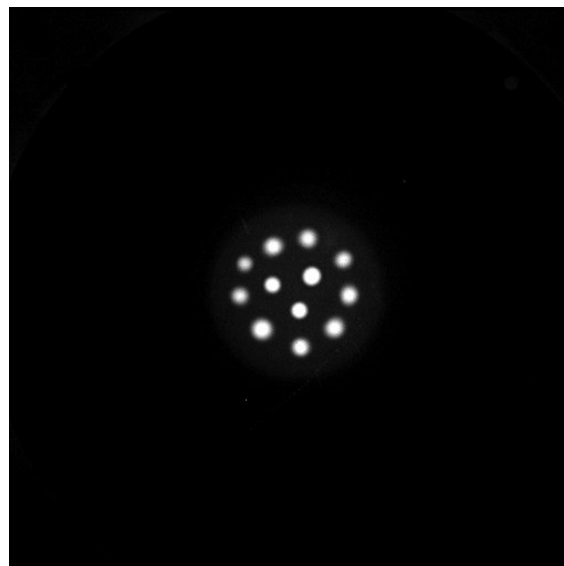
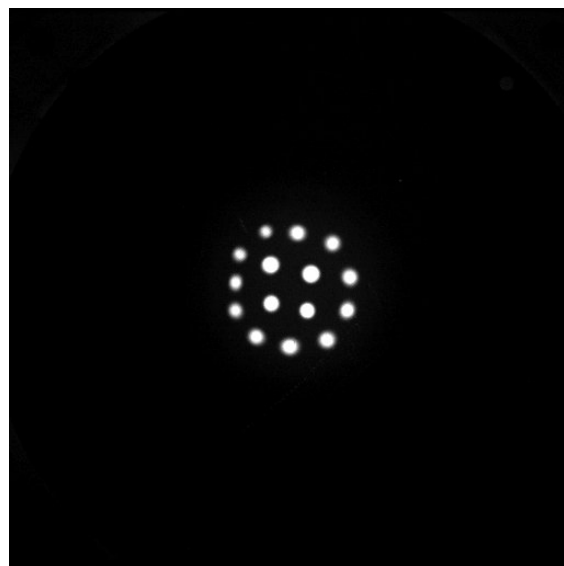
## ■研究目的

- ・ 自己組織化の鍵を握るメカニズムの理解

### 自己組織化の例 1 : 大規模構造形成



## 自己組織化の例 2：純電子プラズマ実験での結晶配位



## ■直接比較ができる観測例／実験結果が欲しい

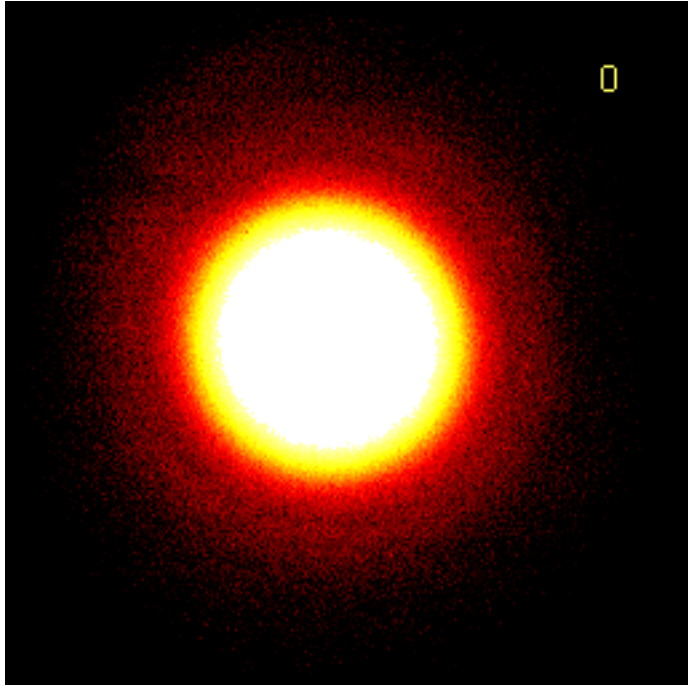
→非中性(純電子)プラズマは、サイクロトロン運動を無視できる空間／時間スケールで、2次元 Euler 方程式と等価な系となる。

運動方程式：
$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_z = 0 \quad \leftarrow n_e \text{ に関する連続の式より}$$

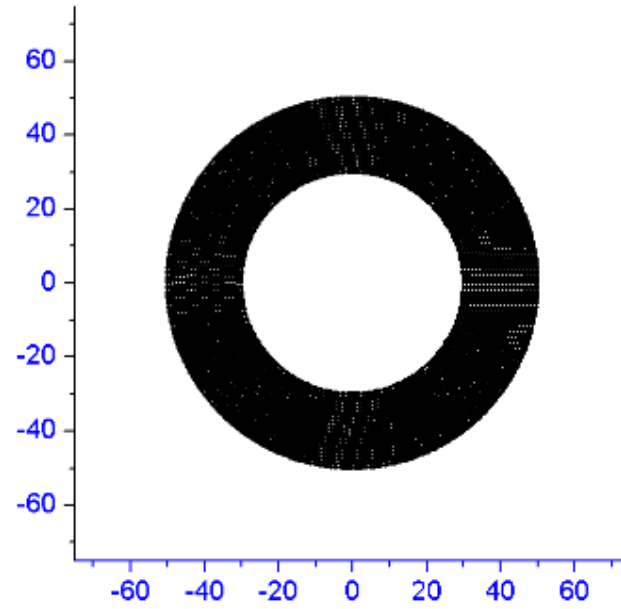
速度場：
$$\mathbf{u} = \hat{z} \times \nabla \frac{\phi}{B_0} \quad \text{流れ関数} \quad \Leftrightarrow \quad \text{静電ポテンシャル}$$

渦度場：
$$\omega_z = \frac{e}{B_0 \epsilon_0} n_e \quad \text{渦度} \quad \Leftrightarrow \quad \text{電子密度}$$

すなわち、点渦系により、シミュレート可能



実験結果



シミュレーション

## 2. 点渦系

- Dirac のデルタ関数の集まりで渦度を離散化したシステム：

$$\hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

2次元非圧縮非粘性 Euler 方程式 ( ミクロ版 ) の形式的解を与える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \right) \\ &= - \sum_i \Omega_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(t) \right) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= - \sum_i \Omega_i \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_i(t), t) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

※マクロな流体方程式の解は連続関数で書かれるべきなので、「ミクロ版」として区別している。

- 流れ関数

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_i \Omega_i G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_i \Omega_i \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)|\end{aligned}$$

- 速度場

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times (\psi(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{z}}) \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \times \sum_i \Omega_i \nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_i \Omega_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)|^2}\end{aligned}$$

- 流れ関数の中に、ポアソン方程式に対する Green 関数が含まれている。  
→ 点渦系は、重力多体系などと同じ「長距離相互作用系」である！

- 二つの系を接触させると、接触面だけでなく、系全体同士で相互作用する。
- これが原因でいろいろと複雑で面白い現象（自己組織化現象）が見られる。

↑この辺りの話に興味がある方は、

プラズマ核融合学会誌 2011年7月号  
小特集 「長距離相関による自己組織化」

- 3次元ナビエ・ストークス系
- 量子渦
- 重力多体系
- 核融合プラズマ／強結合プラズマ
- 2次元点渦系

をご覧ください。

## ■運動論的方程式

- デルタ関数で離散化された点渦解は ( ミクロな ) Euler 方程式の解であると考えられる。
- 点渦解 = ミクロな解

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_+ + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \hat{\omega}_+) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}_- + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \hat{\omega}_-) = 0$$

- ミクロな解 = マクロな部分 + ゆらぎ

$$\hat{\omega}_\pm = \omega_\pm + \delta\omega_\pm$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$$

$$\langle \hat{\omega}_\pm \rangle \equiv \omega_\pm$$

- Klimontovich formalism

揺らぎを含むミクロな量をミクロな方程式に代入し、アンサンブル平均をとった結果は次式のとおり（複号同順）：

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_{\pm} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega_{\pm}) = -\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_{\pm}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{\pm} = \langle \delta \mathbf{u} \delta \omega_{\pm} \rangle$$

$$= -\int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \delta \omega(\mathbf{r}') \delta \omega_{\pm}(\mathbf{r}) \rangle$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla G(\mathbf{r})$$

$\mathbf{\Gamma}_{\pm}$  : diffusion flux

- 得られた diffusion flux の具体的表式

$$\mathbf{\Gamma}_{\pm}(\mathbf{r}) = -\overleftrightarrow{\mathbf{D}} \cdot \nabla \omega_{\pm} \pm \mathbf{V} \omega_{\pm}$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{D}} = \frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} (\omega'_{+} - \omega'_{-})$$

$$\mathbf{V} = \frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot \nabla' \omega'$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{+} + \mathbf{\Gamma}_{-}$$

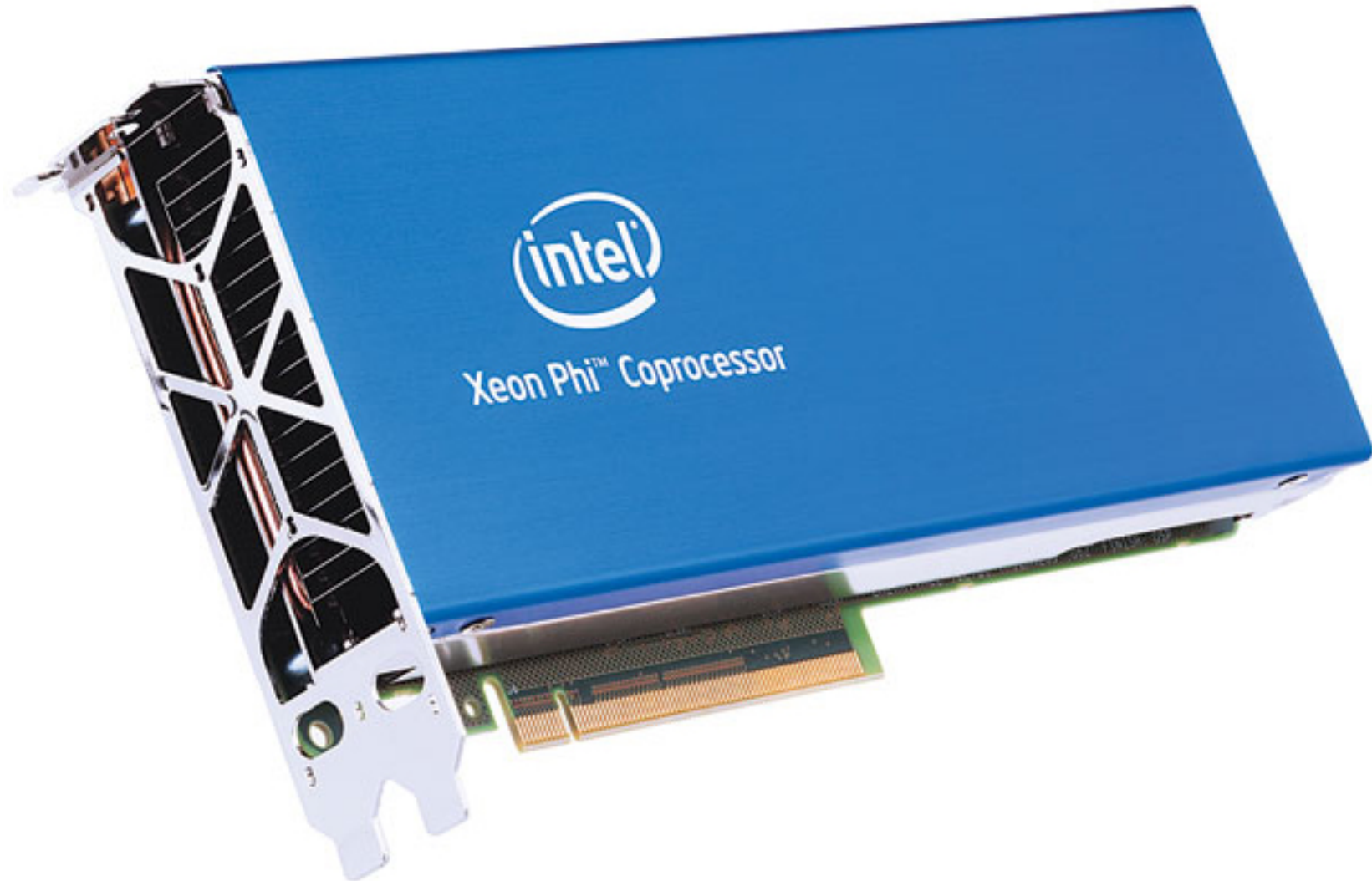
$$= -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot [(\omega'_{+} - \omega'_{-}) \nabla \omega - (\omega_{+} - \omega_{-}) \nabla' \omega']$$

### 3. シミュレーションを併用した衝突項の意味づけ

#### ■使用ハードウェア

MDGRAPE-2 / 3

Xeon Phi 7120A (使い始めたばかり)



## ■ 代表的分布

- 時間漸近的に得た平衡分布

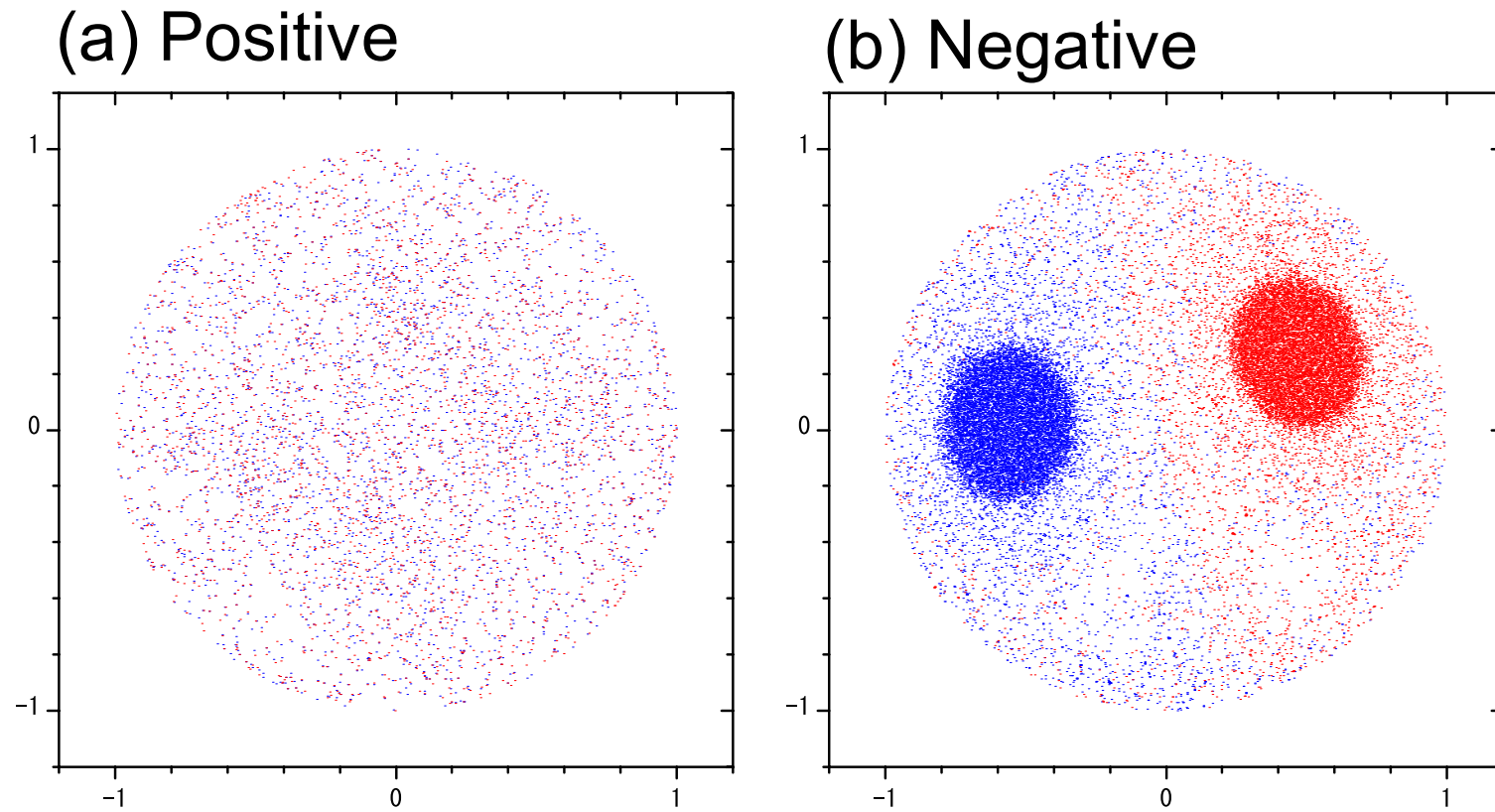


図 3.1 平衡分布 赤 = 正の点渦 青 = 負の点渦

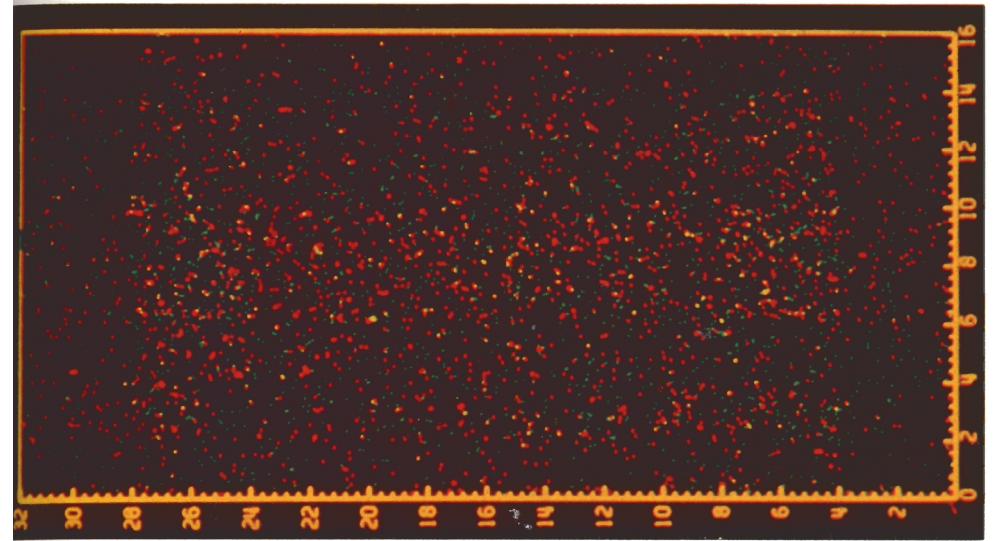
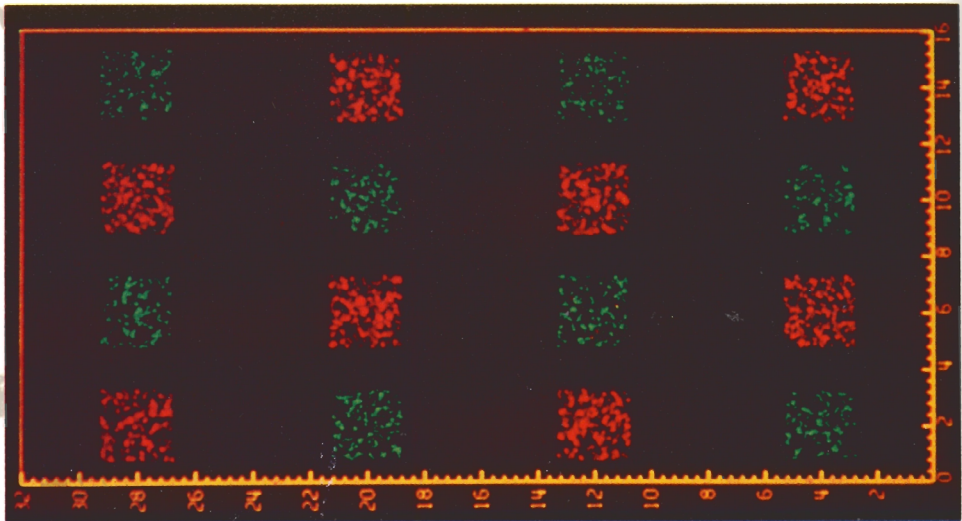
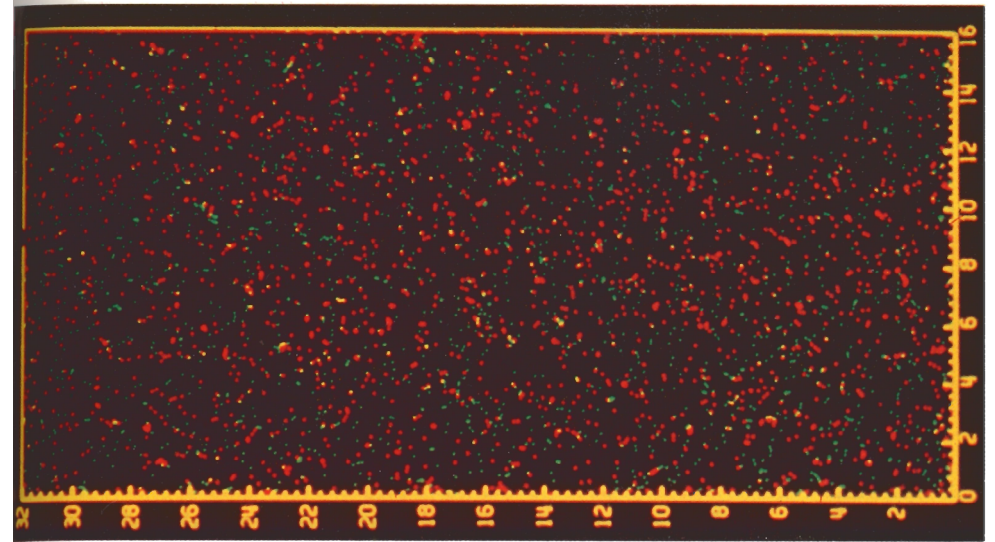
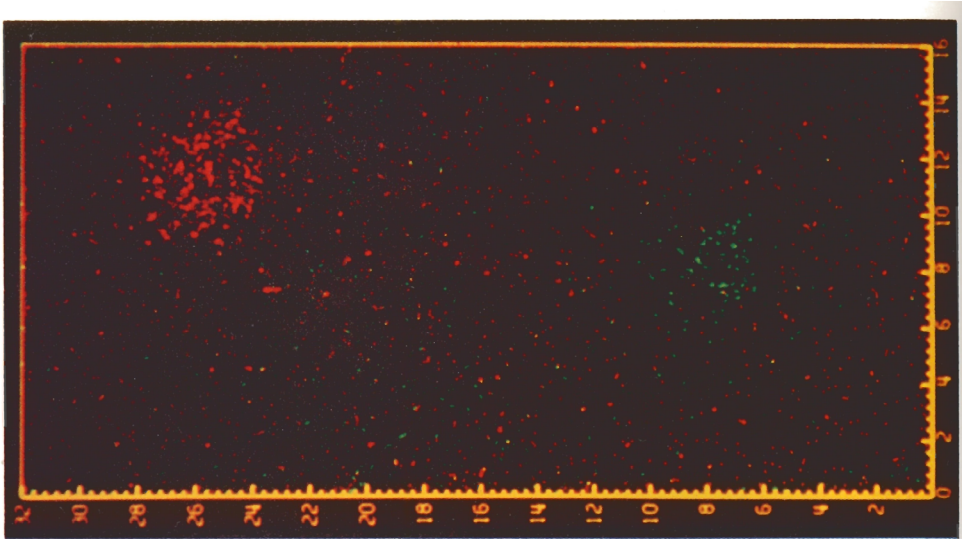
正温度：正負点渦が一様に広がった分布

負温度：同符号点渦が凝集した高エネルギーな分布

# ■ 平衡分布の解析解

(sinh-Poisson equation by Joyce & Montgomery)

$$-\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) = \omega_z(\mathbf{r},t) = \omega_0^+ \exp(-\beta\Omega_0\psi(\mathbf{r},t)) - \omega_0^- \exp(\beta\Omega_0\psi(\mathbf{r},t))$$



## ■各点渦が持つエネルギーに注目した度数分布

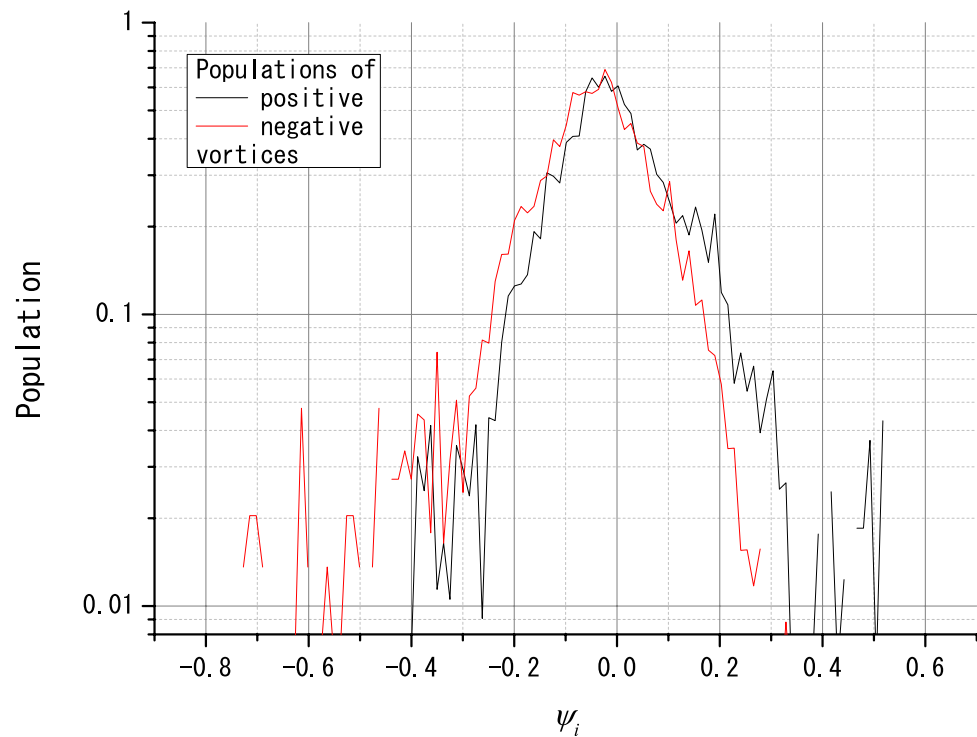
- 各粒子に属するエネルギー  $E_i$  を, 次式で定義する。

$$H = \sum_i E_i$$

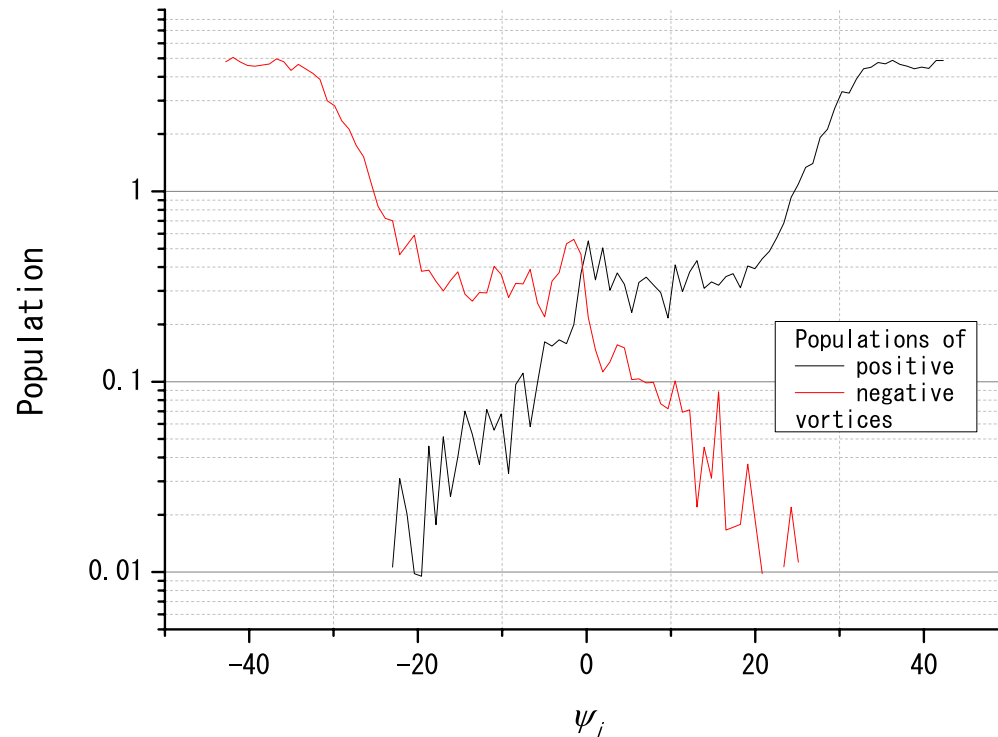
$$E_i = \frac{1}{2} \Omega_i \psi_i$$

$$\psi_i = \sum_j \Omega_j G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \Omega_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + \frac{1}{2\pi} \sum_j \Omega_j \ln |\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}_j| - \frac{1}{2\pi} \sum_j \Omega_j \ln \frac{R}{|\mathbf{r}_j|}$$

- $E_i$  によって分類した点渦の度数分布  
あるエネルギーの点渦が何個あるか。



正温度



負温度

図 3.3 度数分布

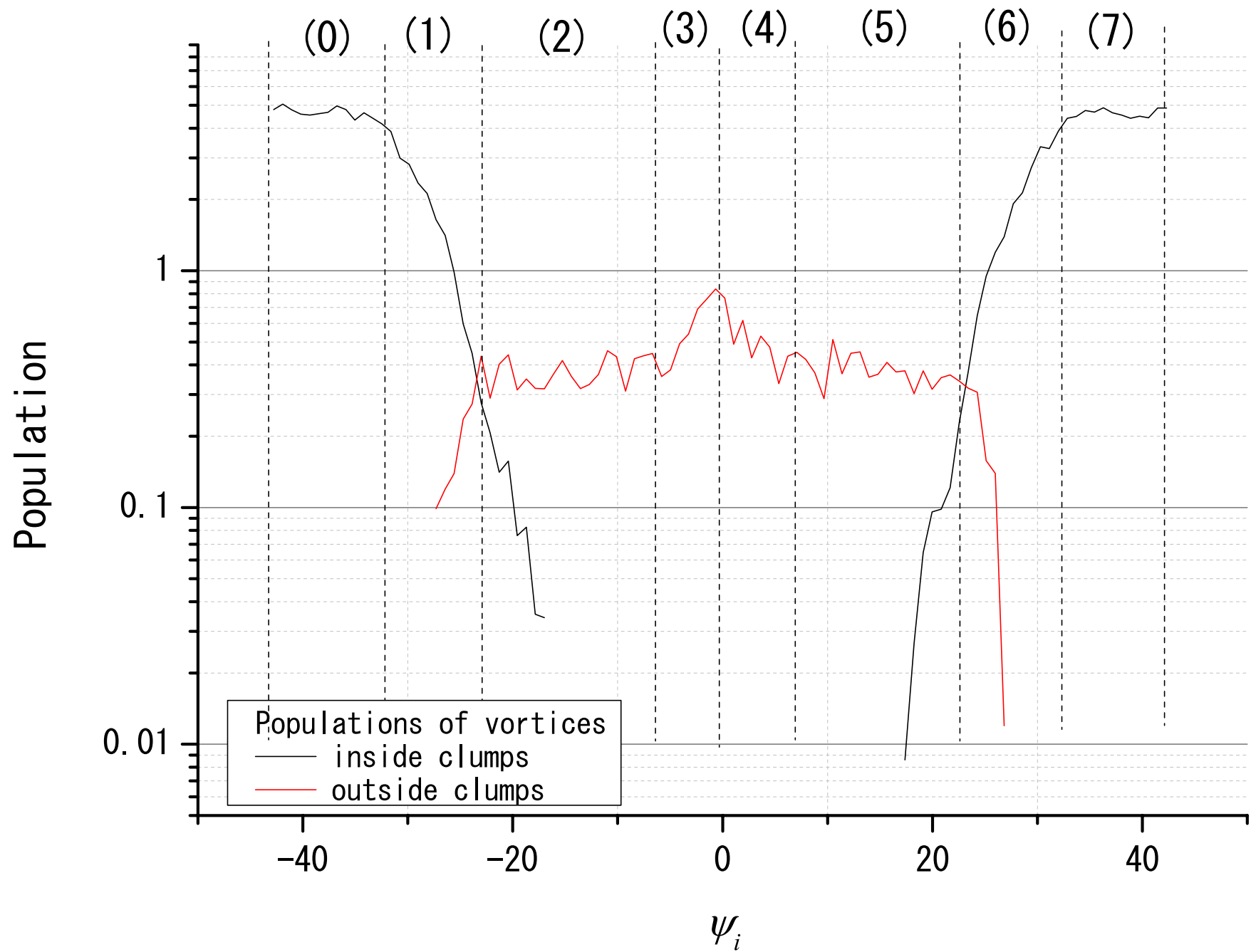


図 3.4 クランプの内外で度数分布を再構成

- $E_i$  の大小によって色分けした点渦分布

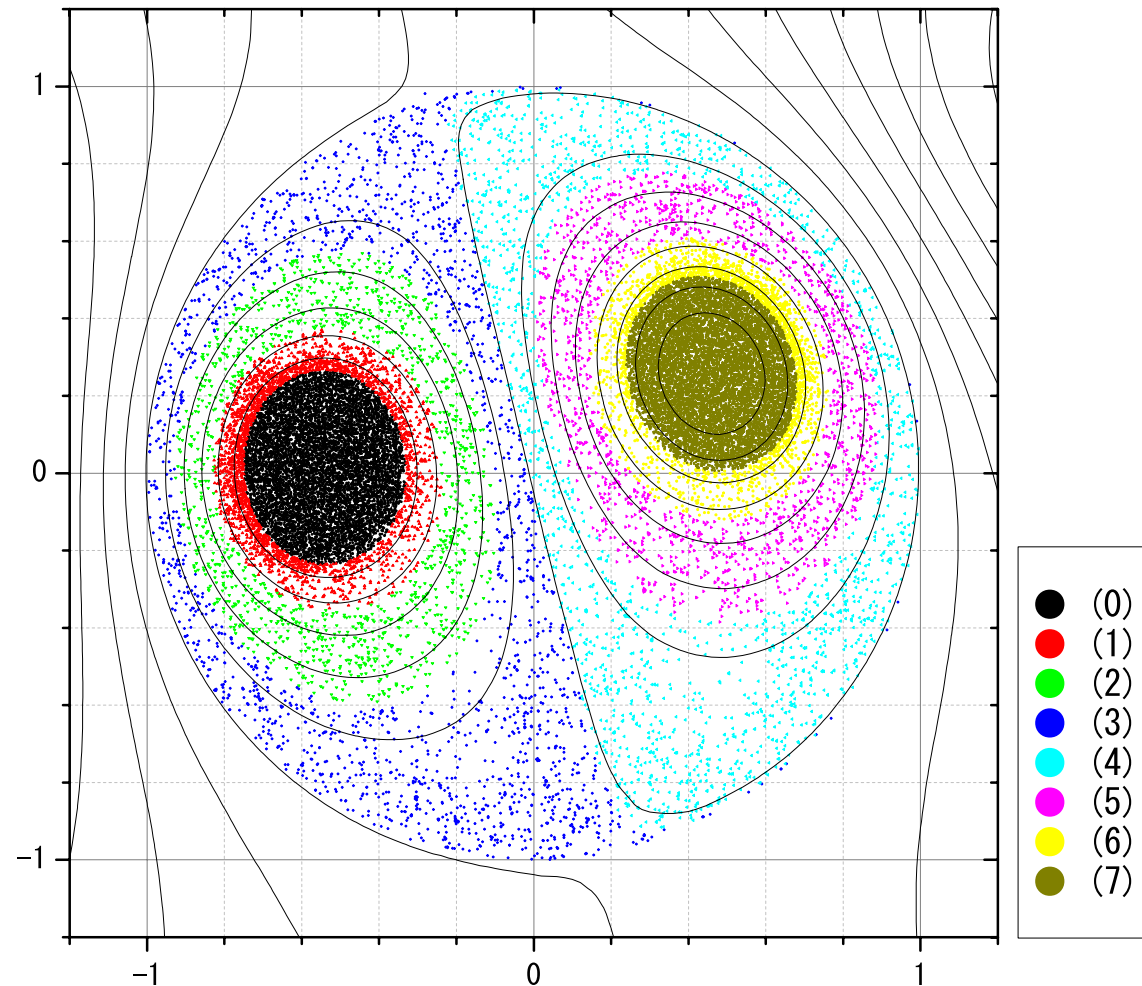


図 3.5 点渦分布

色分け = 点渦密度 (個々の点渦のエネルギー)

• 黒い線 = 流れ関数の等高線

→  $\omega = \omega(\psi)$  または  $\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = 0$  を意味する

## ■二つの異なるタイムスケールでの時間発展

初めに,  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = -\nabla \cdot \Gamma$  …violent relaxation (collisionless)

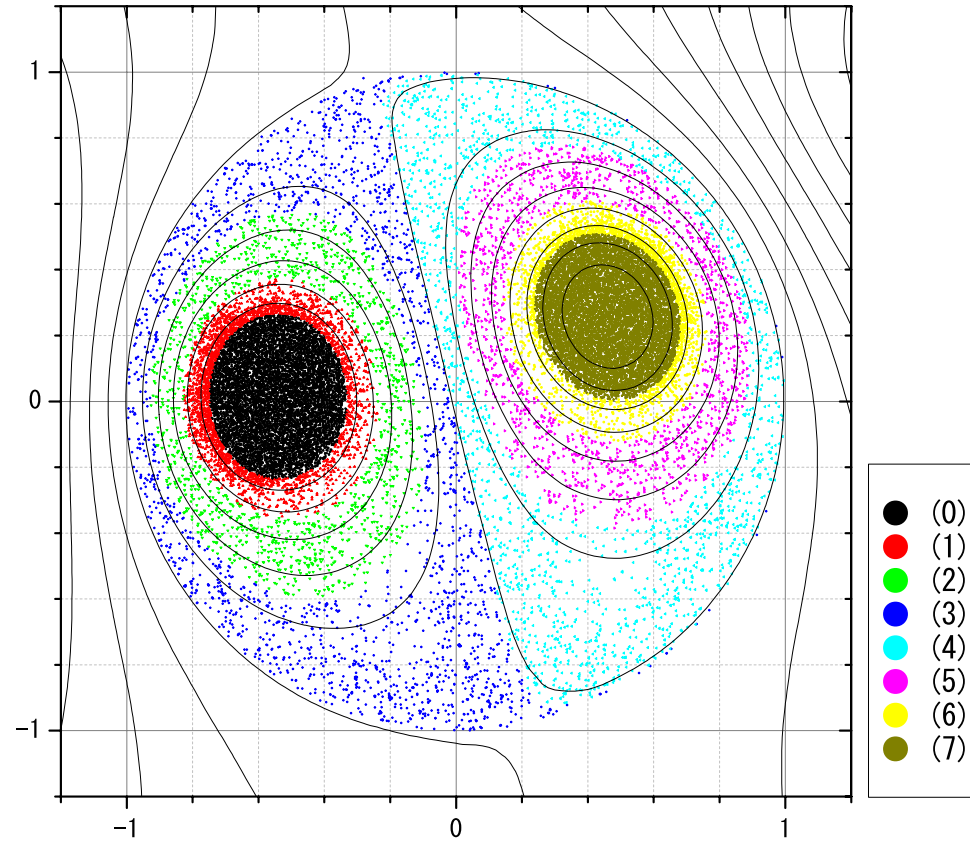
次に,  $\omega = \omega(\psi)$  または  $\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = 0$  が成立する準平衡状態へ緩和

→  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = -\nabla \cdot \Gamma$  …slow relaxation (collisional)

→ ゆっくりと平衡状態へ緩和

## ■ 平衡分布

$$\frac{d\omega_{\text{eq}}}{d\psi_{\text{eq}}} = -\beta\Omega(\omega_{\text{eq}+} - \omega_{\text{eq}-}) \geq 0 \quad \text{が成り立つ。}$$



- 準平衡状態でも, おそらく  $\frac{d\omega}{d\psi} \geq 0$  が期待できる  
(クランプ内や背景分布は  $\beta = 0$  のため)

## ■ エネルギー散逸率

- ・ 拡散項に由来する部分とドリフト項に由来する部分を別々に評価可能：

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt} \Big|_D + \frac{dE}{dt} \Big|_V = 0$$

$$\frac{dE}{dt} \Big|_D = -\frac{\Omega}{R} \int dr \int dr' \frac{|\nabla\psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} (\omega'_+ - \omega'_-) \frac{d\omega}{d\psi} \leq 0$$

$$\frac{dE}{dt} \Big|_V = \frac{\Omega}{R} \int dr \int dr' \frac{|\nabla\psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} (\omega_+ - \omega_-) \frac{d\omega'}{d\psi'} \geq 0$$

$$\frac{dE}{dt} \Big|_V = -\frac{dE}{dt} \Big|_D$$

$$\frac{d\omega}{d\psi} \geq 0 \quad \text{が役に立つ！}$$

## ■ エントロピー生成率 (H 定理)

- ・ 拡散項に由来する部分とドリフト項に由来する部分を独立に評価可能

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \left. \frac{dS}{dt} \right|_D + \left. \frac{dS}{dt} \right|_V \geq 0 \\ \left. \frac{dS}{dt} \right|_D &= \frac{k_B}{R} \int dr \int dr' \left( \frac{|\nabla \omega_+ \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{\omega_+} - \frac{|\nabla \omega_- \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{\omega_-} \right) \frac{\omega'_+ - \omega'_-}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \geq 0 \\ \left. \frac{dS}{dt} \right|_V &= -\frac{k_B}{R} \int dr \int dr' \nabla \omega \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot \nabla' \omega' \\ &= -\frac{k_B}{R} \int dr \int dr' \frac{|\nabla \psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \frac{d\omega}{d\psi} \frac{d\omega'}{d\psi'} \leq 0\end{aligned}$$

- ・ システムが Boltzmann 分布で特徴づけられる平衡状態に達した時点で、エントロピー生成は止まる。

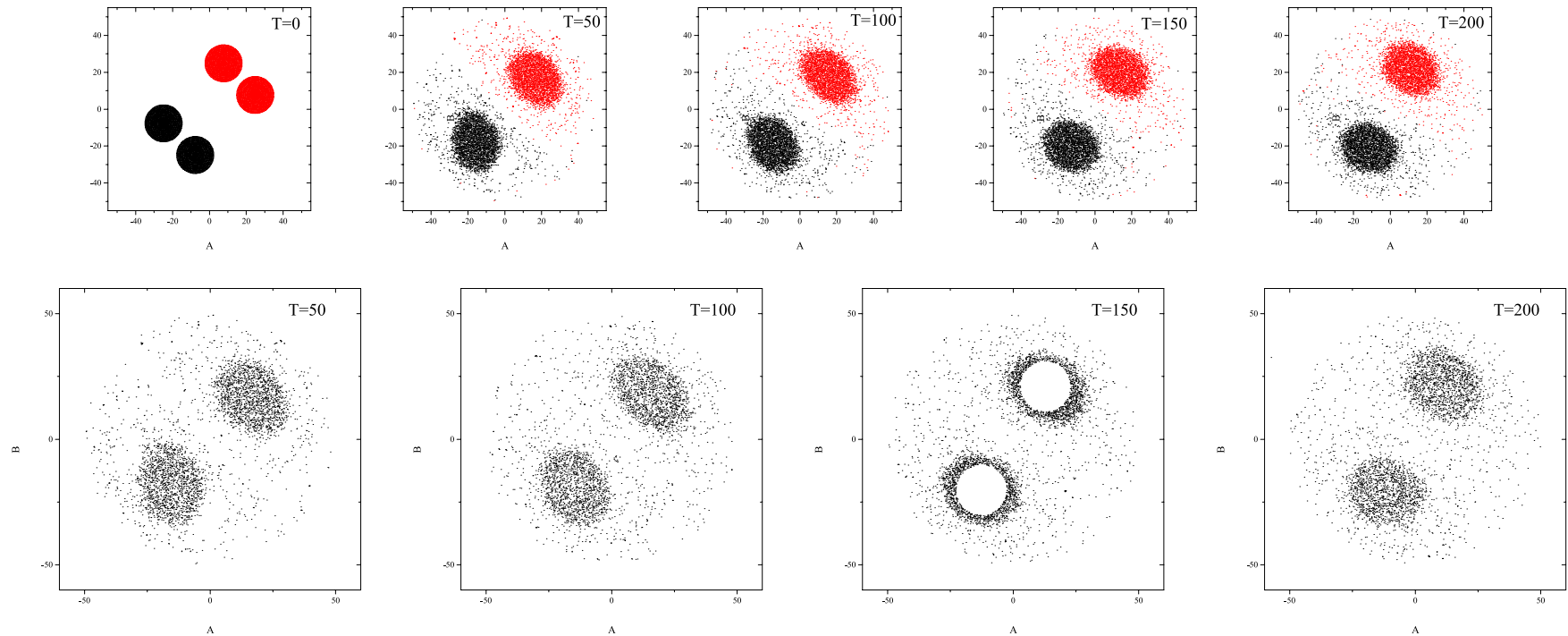
$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_V = - \left. \frac{dS}{dt} \right|_D$$

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

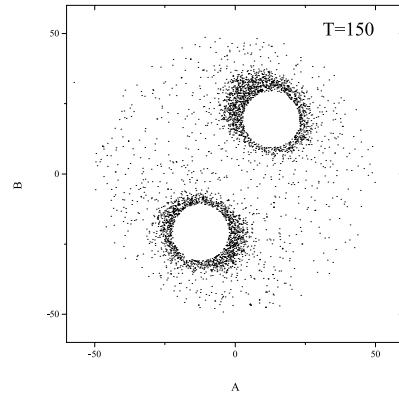
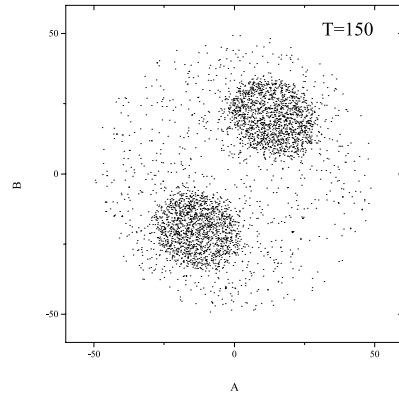
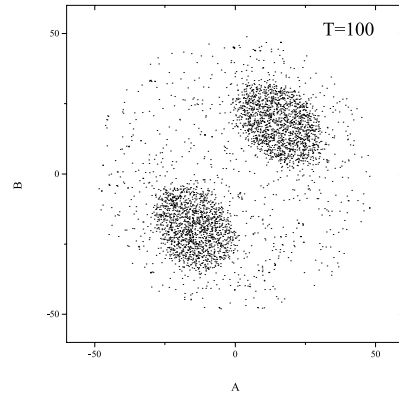
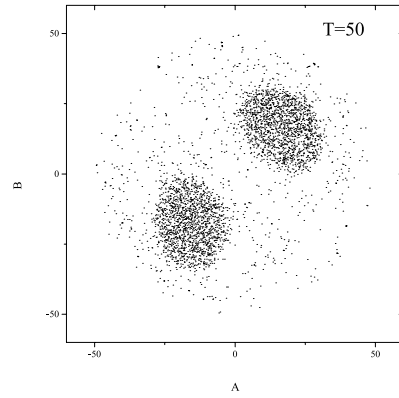
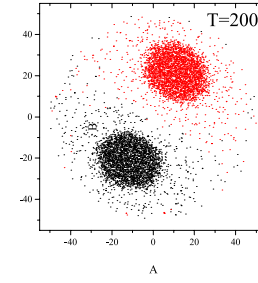
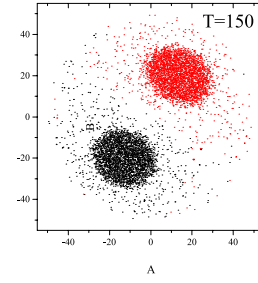
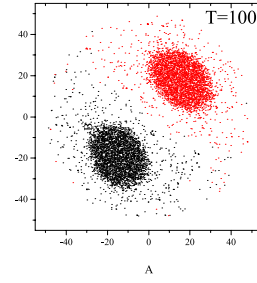
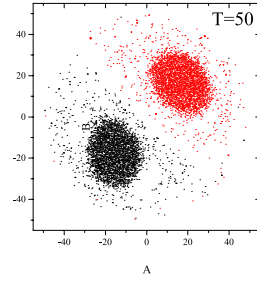
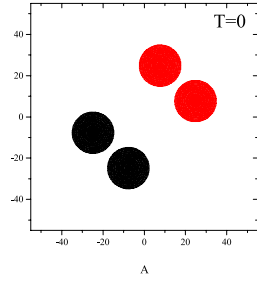
# ■ラベリングによる粒子の追跡

- ある時刻でクランプ外にいる粒子にラベリング
- その他の時刻で、それらラベリングされた粒子がどこにいるのか追跡

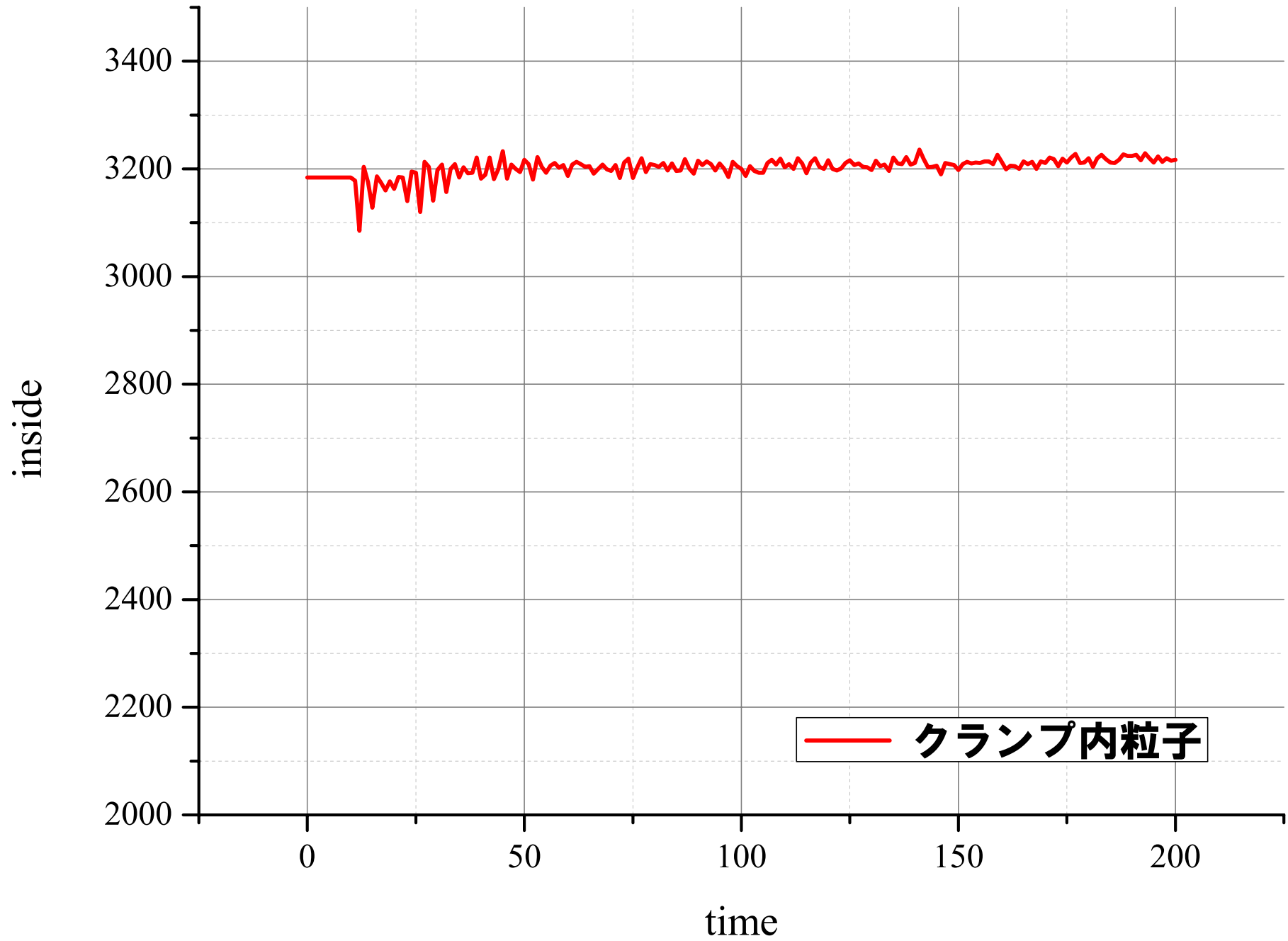
分類した時刻  $T = 150$



# 分類した時刻 $T = 200$

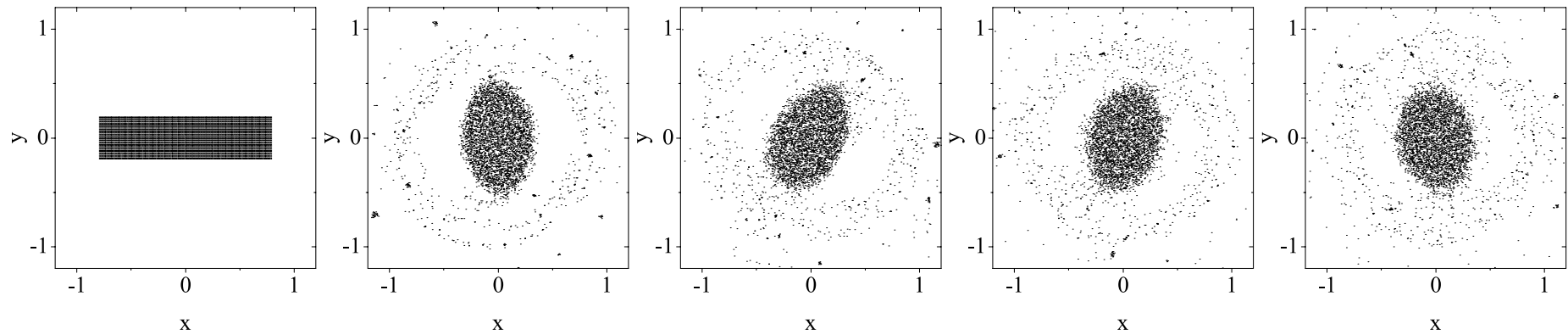


・ クランプ内に存在する点渦数の時間変化



## ■ H 定理の数値的検討

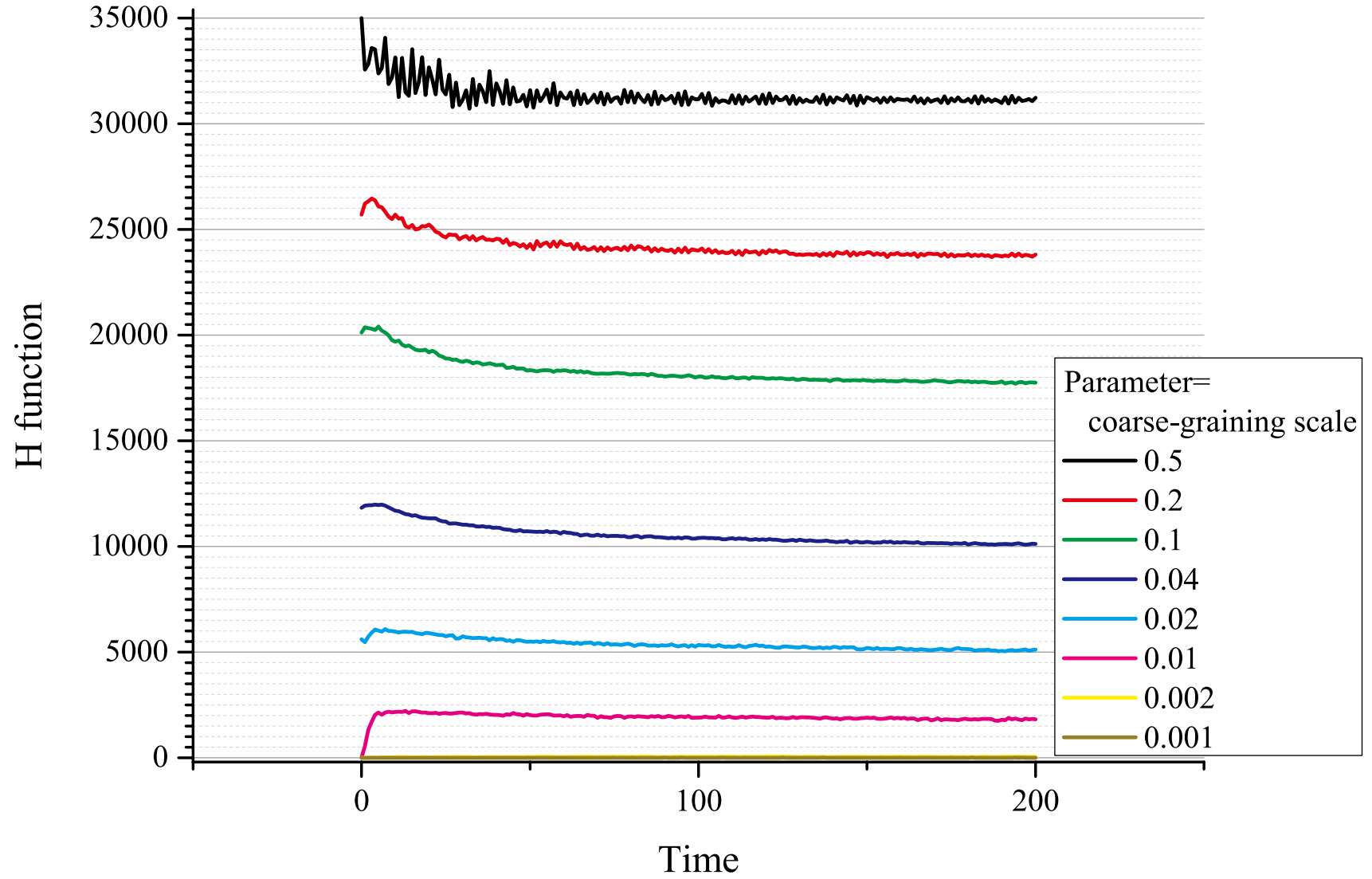
- 時間発展結果



- 有限サイズのセルに区切り, 点渦分布を連続関数に変換

- H 関数の時間発展を追跡

# • H 関数の時間発展



- 緩和時間の見積

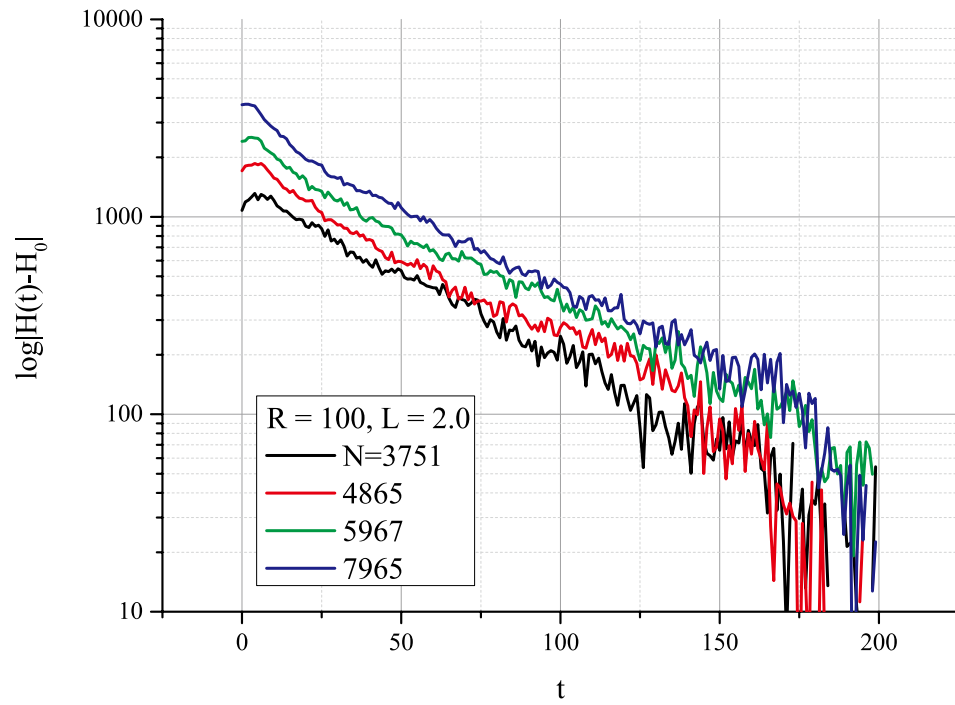
$$\tau_r \propto \frac{1}{\Omega},$$

$$\frac{\tau_r}{\tau_d} \propto N$$

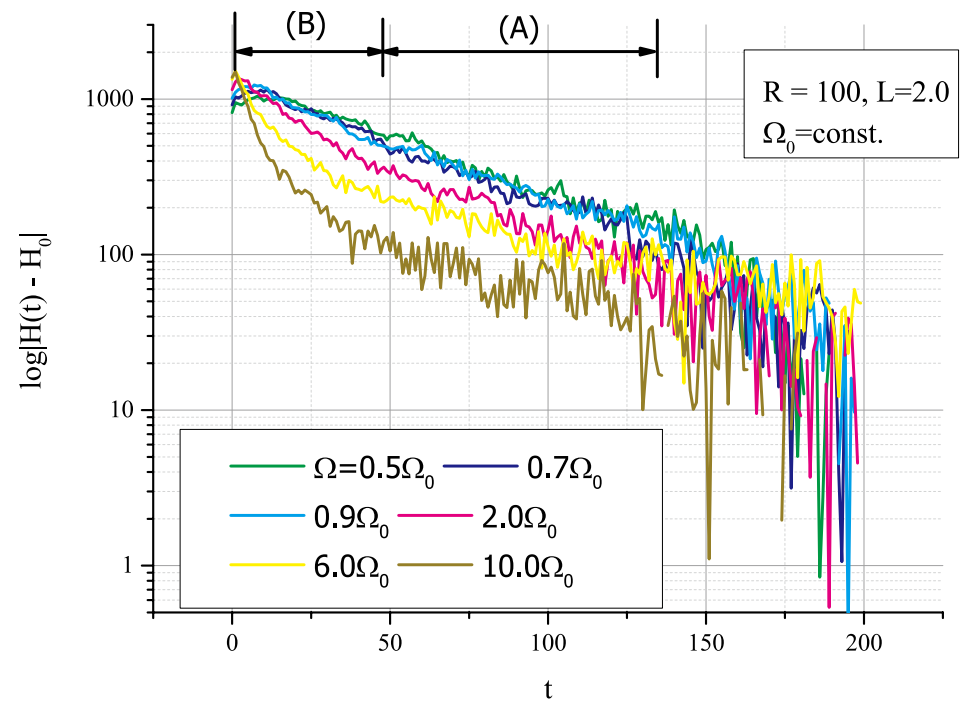
- 時間依存性

$$H(t) = H_0 + H_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right)$$

•  $\log|H(t) - H_0|$  のプロット

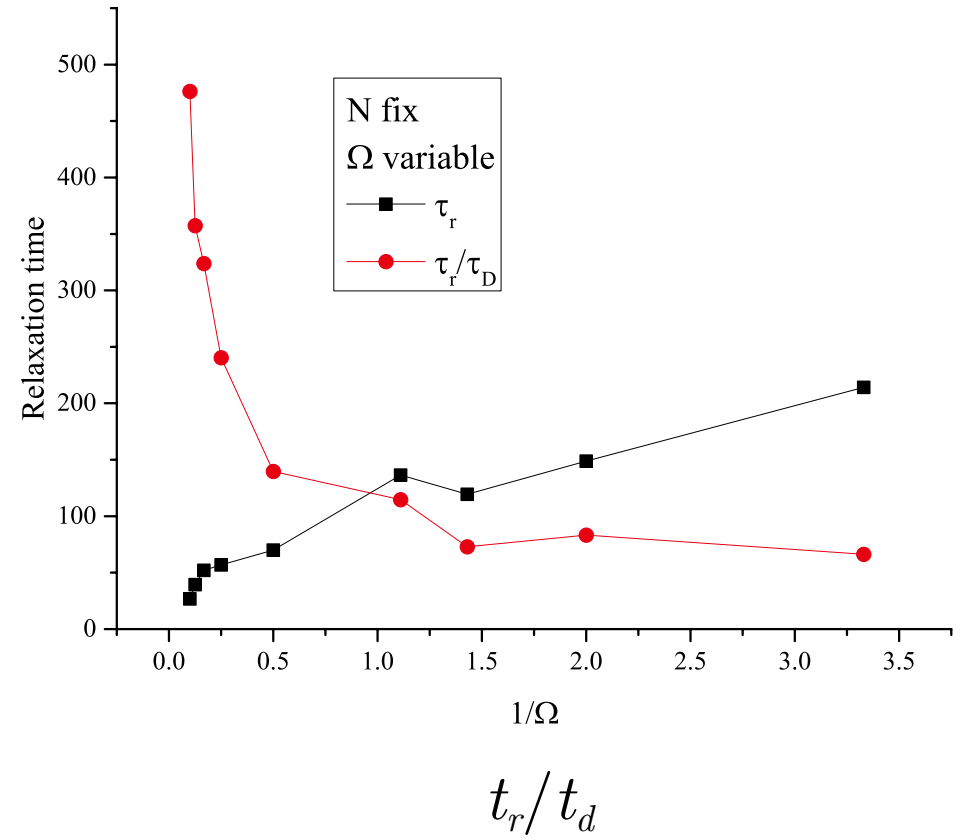
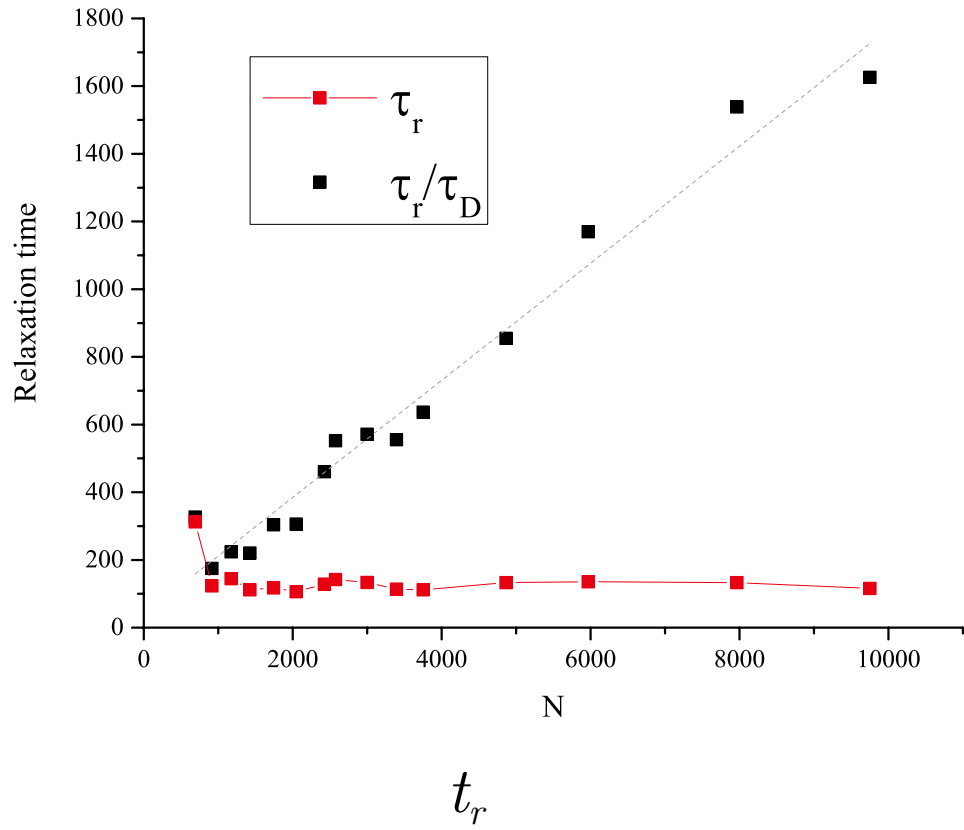


N 依存性



$\Omega$  依存性

•  $t_r$ ,  $t_r/t_d$  の測定



## ■ローカル平衡とグローバル平衡

- ローカル平衡 局所的に同一温度

$$\omega_{leq}(\mathbf{r}) = \omega_0 \exp\left(-\beta_{leq}(\mathbf{r})\Omega\psi_{leq}(\mathbf{r})\right)$$

衝突項はローカルにゼロ

- グローバル平衡 系全体で同一温度

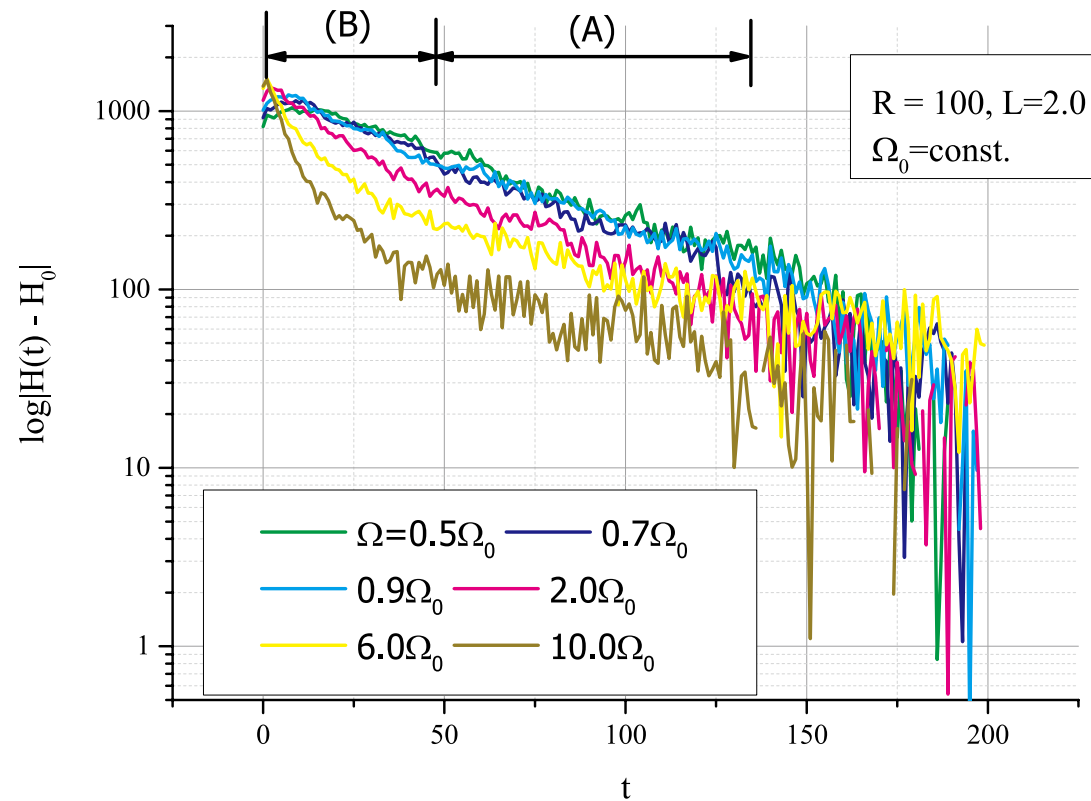
$$\omega_{eq}(\mathbf{r}) = \omega_0 \exp\left(-\beta_{eq}\Omega\psi_{eq}(\mathbf{r})\right)$$

衝突項は系全体でゼロ

拡散項とドリフト項の間に, Einstein の関係式が成立

$$\mathbf{V} = -\beta\Omega\mathbf{D} \cdot \nabla\psi$$

# ■ 速い slow relaxation と遅い slow relaxation



violent relaxation

→ 速い slow relaxation

ローカル平衡達成

→ 遅い slow relaxation

グローバル平衡へ向けてゆっくりと緩和

## 4. 結論

- 点渦系は、マクロなスケールで見ると、点渦という離散分布に起因する衝突項が内在

- ドリフト項が面白い性質をもつ

	拡散項	ドリフト項	トータル
エントロピー生成	+	-	+ or ゼロ
エネルギー	減少	増加	ゼロ

- 自己組織化では、ドリフト項が重要な働きをしていることを示唆

- いろいろなステージを経て実現される平衡分布

初めに,  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = -\nabla \cdot \Gamma$  ...violent relaxation (collisionless)

次に,  $\omega = \omega(\psi)$  または  $\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = 0$  が成立する準平衡状態へ緩和

→  $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = -\nabla \cdot \Gamma$  ...slow relaxation (collisional)

→速い slow relaxation により, ローカル平衡を達成

→衝突項の効果がローカル平衡達成により, さらに小さくなる

→ゆっくりとグローバル平衡へ緩和

- 系の対称性が, 緩和速度に影響を与えている可能性が高い