

壁面流における乱流遷移過程

大阪大学基礎工学研究科 清水 雅樹, 河原 源太, 後藤 晋, 長賢太郎

1 緒言

我々は大型計算機を用いて、非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解の分岐構造を求め、その分岐構造から乱流遷移過程の解明を目指している。ここでは、先端的計算科学研究プロジェクト(プロダクトラン課題)によって調べた2種類の乱流遷移(カオスの発生)について報告する。1つ目は、平面クエット流における場合で、サドル・ノード分岐によって現れる非線形吸引周期解に関連して、カオスアトラクタが発生する例を報告する。層流解が安定であり、有限振幅の攪乱によって遷移が生じる、壁乱流の典型例である。2つ目は、壁面によって囲まれた正方領域において、熱対流の循環方向のカオス的反転に関する分岐構造を報告する。様々な容器内の対流の方向([1,2])や、天体の双極磁場の方向の反転運動等、系における反転対称性に起因する大域分岐の例である。

2 ミニマル平面クエット流におけるカオスの発生とその性質

平面クエット流とは、平板の運動によって駆動される、2枚の平行平板間の流れである。流れの状態は2枚の平行平板の速度差を $2U$ 、距離を $2h$ として、

$Re = Uh/\nu$ (ν :動粘性係数) に依存する。平板に平行方向に長さ $(1.755\pi h, 1.2\pi h)$ で流れは周期的とした場合を、ミニマル平面クエット流と呼ぶ。(詳しくは[3]を参照。) 図1にこの系におけるカオスアトラクタの発生に伴う分岐構造を示す。矢印で表される Re は、吸引領域境界の崩壊に伴う大域分岐点であり、アトラクタの消滅等が観測される。図2, 3にカオスアトラクタの軌道の性質を示す。図3の写像は1次元の単峰写像とよく似ている。系は超多次元の力学系であるが、その動力学は本質的に極めて低次元であることを示している。

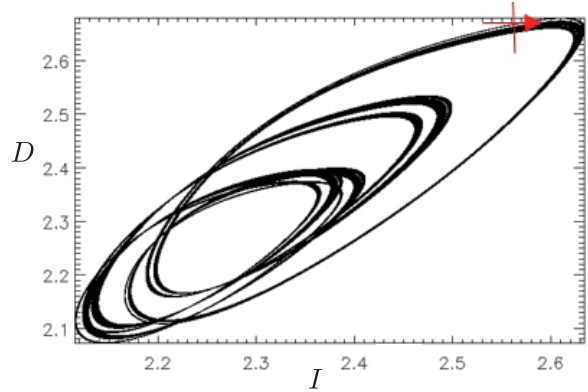


図2: $Re = 240.4$ におけるカオスアトラクタの ID 平面への射影。 I, D はそれぞれエネルギー注入率とエネルギー散逸率。

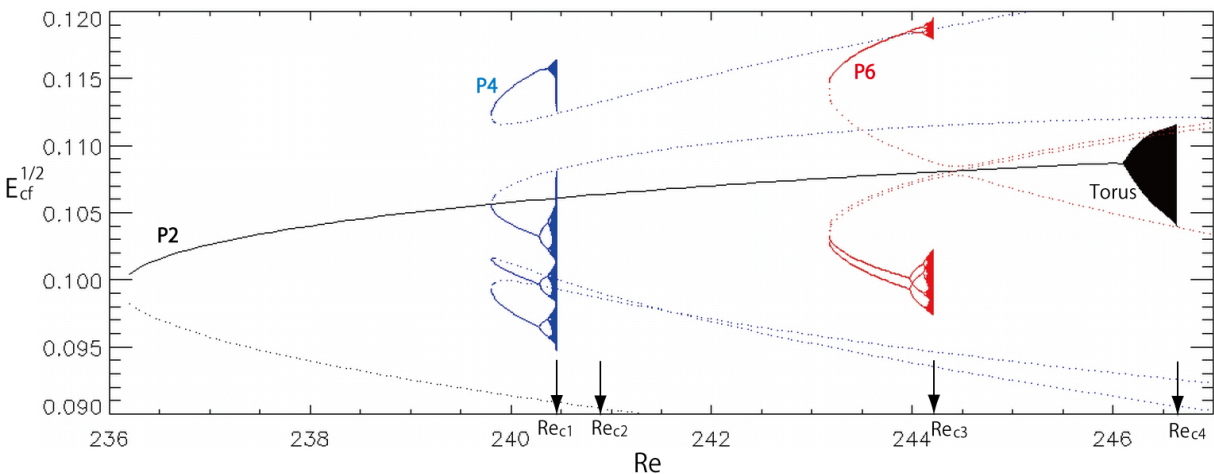


図1: ミニマル平面クエット流における分岐図 ($236 \leq Re \leq 247$). 攪乱エネルギー (E_{cf}) の時間極大値のプロット。実線は安定周期解, 点線は不安定周期解を表す。4周期解(P4)と6周期解(P6)から、それぞれ周期倍分岐によるカオスアトラクタが発生する。矢印のレイノルズ数はこれらのカオス集合に関する大域分岐点が表示されている。

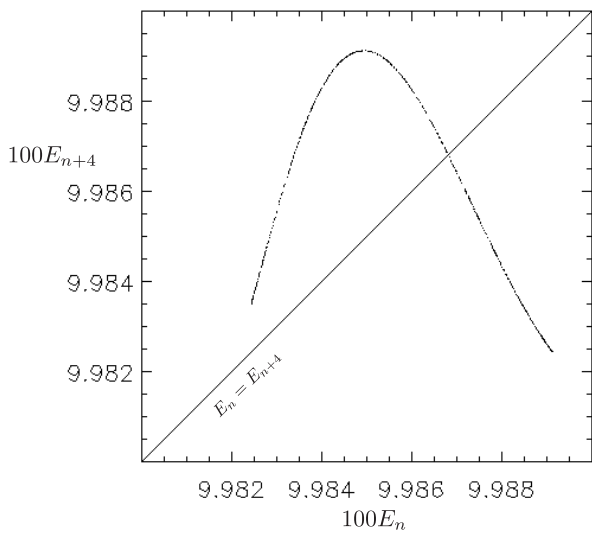


図3 : $I = 2.55$ (図2の矢印の向き)におけるポアンカレ写像．断面 $I = 2.55$ を n 回目に通過するときの運動エネルギーが E_n .

3 正方容器内の熱対流セルのカオス的反転の発生

ここでの系は、鉛直方向に温度勾配がある正方容器内での熱対流の問題を考える。(詳しくは [4] を参照.) この系は、浮力項と粘性項のそれぞれの大きさを表す Ra と Pr の2つのパラメータが存在する. 以下 $Pr = 7$ の場合を示す. 図4, 5に対流セルの運動方向のカオス的反転に至る分岐構造を示す. 反転は全角運動量 L の符号の変化で判断する. 1つ渦の定常解(図4の左上の挿絵の状態)は $P1$ で生成され, H で周期解が生じる. 図4, 5では L が反転しない解は $L \geq 0$ の解のみ示されている. 図6の記号+は反対称なアトラクタの吸引領域境界を形成する不安定解であり, 大域分岐点 G に近づ

くと, 反対称な解は互いの距離を縮め, G でそれぞれの軌道がこの境界に接触する(ホモクリニック軌道). その直後, 軌道はカオス的な反転運動を開始し(図7の中), 無数の周期運動が生じていると思われる. この大域分岐は3次元のローレンツ系におけるホモクリニック爆発を想起させ, この例でも初期のカオスは本質的に低次元である.

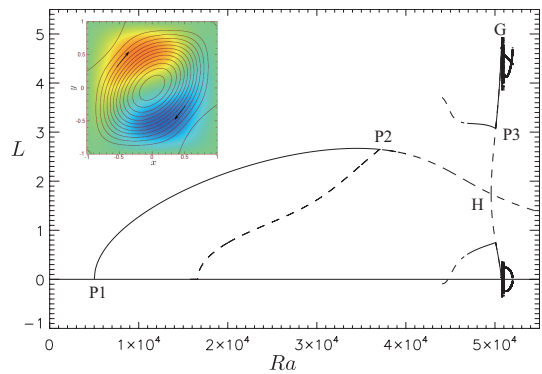


図4 : 1つ渦の分岐構造. $P1-P3$ はピッチフォーク分岐点, H はホップ分岐点, G はカオス的反転運動の発生点. 縦軸は角運動量であり, 非定常解では時間的極値のみがプロットされている. 実線は安定解, 破線は不安定解である.

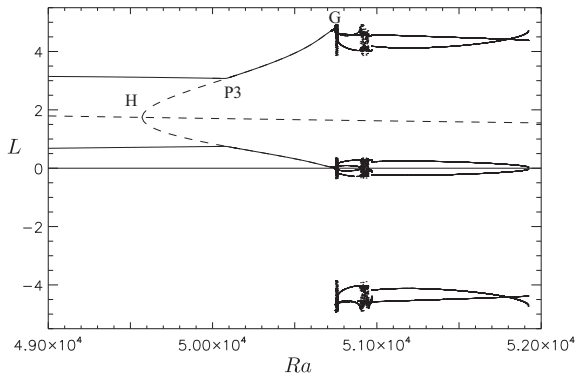


図5 : 図4の拡大図.

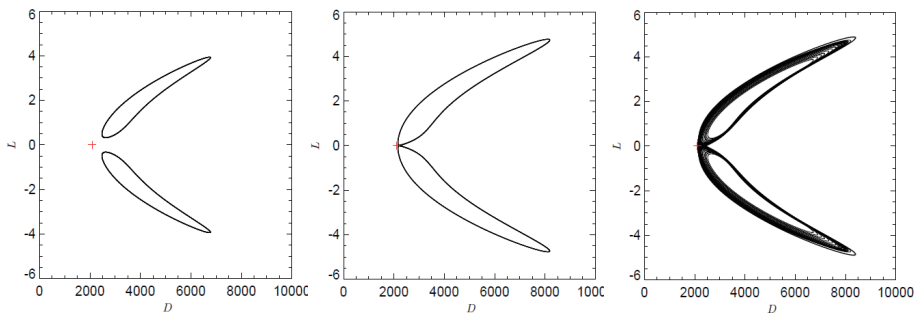


図6 : カオス的反転開始前後の軌道. 左から順に, $Ra = 50500, 50740, 50750$. 横軸は運動エネルギーの散逸率.

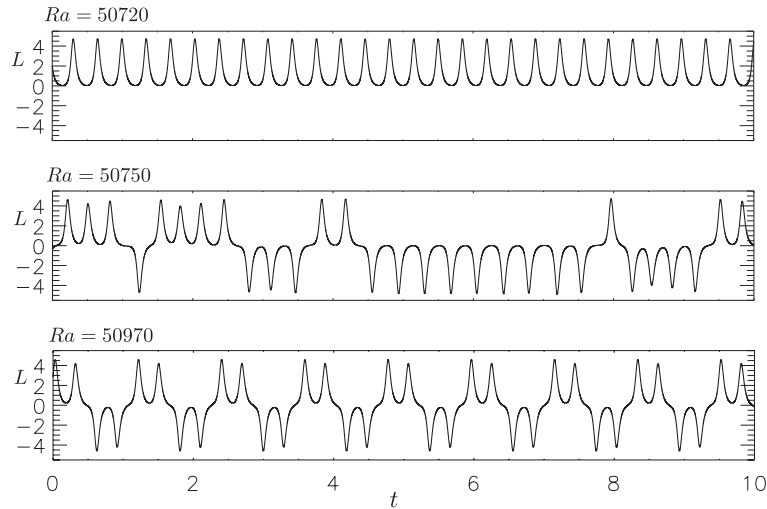


図7：カオスの反転開始前後の Ra における，角運動量の時間変化．

4 結言

大規模計算機と独自に開発した数値解法を用いて，非圧縮ナビエ・ストークス方程式の，十分に収束した数値解を高速かつ高効率に求めることで，カオスアトラクタの発生過程やカオス集合の性質を詳しく調べることが可能となった．上で報告した2例の系では，いずれの場合でも高次元の系でありながら，初期のカオスの観測結果からは低次元力学系に同相であるように見られる．前者は自明解に有限振幅の攪乱を与えてカオスに遷移する例であり，後者は自明解から超臨界分岐によって生じた解に起因して遷移する例であるが，いずれもカオスがアトラクタから発生しているために，その発見が比較的容易であったと思われる．我々は他にも乱流遷移する系において，こうした初期カオスの発生を捕らえようと試みて

いるが，そのほとんどは容易ではない．こうした系による違いや，発達した乱流への移行に伴うカオス集合の性質の変化について，今後研究を続けていく予定である．

[参考文献]

- [1] Araujo, Grossmann and Lohse, Wind Reversals in Turbulent Rayleigh-Benard Convection, PRL 95, 084502, 2005
- [2] Sugiyama et al., Flow Reversals in Thermally Driven Turbulence, PRL 105, 034503, 2010
- [3] Kawahara, Laminarization of minimal plane Couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence, *Phys. Fluids*, **17**, 041702, 2005.
- [4] Mizushima and Adachi, Sequential Transitions of the Thermal Convection in a Square Cavity, JPSJ 66, 79-90, 1997